CHASLES

HISTOIRE DE L'ARITH-
METIQUE

9/7/20

Chasles

Histoire de l'Arithmétique

HISTOIRE DE L'ARITHMÉTIQUE.

Explication des Traités de l'Abacus, et particulièrement du Traité de Gerbert;

Par M. CHASLES.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, séances des 23 et 30 janvier, et 6 février 1843.)

Préliminaires historiques.

Un des documents les plus obscurs dans l'histoire des sciences et qui ont le plus occupé les érudits, est le fameux Traité de Gerbert sur les nombres, qu'on a coutume de désigner sous le titre *De numerorum divisione*, ou bien *Rationes numerorum abaci*, ou simplement sous le nom d'*Abacus*, terme qui signifiait alors *Arithmétique*. Cette pièce porte dans les manuscrits la suscription: *Constantino suo Gerbertus scolasticus* (1), parce qu'elle est adressée à Constantin, moine de l'abbaye de Fleury.

Guillaume de Malmesbury, chroniqueur du XIIme siècle, fait mention de cet écrit. Il dit que Gerbert avait rapporté de chez les Sarrasins d'Espagne, entre autres connaissances merveilleuses, celle de l'Abacus : « *Abacum certe primus a Saracenis rapiens, regulas dedit quæ a sudantibus Abacistis vix intelliguntur* (2) » ; puis il cite le Traité même adressé à Constantin. On a

---

(1) Plusieurs écrivains, notamment les auteurs de l'*Histoire littéraire de la France* (t. VI, p. 579), ont cru que ces divers titres appartenaient à des ouvrages différents que Gerbert aurait composés sur le même sujet. C'est une erreur.

(2) *Willielmi monachi Malmesburiensis, De Gestis regum Anglorum lib. V* (*Voy.* l. II, p. 64 et suiv.).

conclu de là que Gerbert avait puisé ses connaissances arithmétiques chez les Arabes, et que c'était leur méthode de calcul qu'il avait enseignée sous le nom d'*Abacus.* Cette opinion a été admise généralement, et l'est encore aujourd'hui, bien qu'on ait voulu aussi, depuis un siècle, faire honneur à Fibonacci d'avoir, le premier, enseigné l'arithmétique arabe en l'an 1202, à son retour des côtes d'Afrique. Pour tout concilier, on suppose que les règles de Gerbert étaient tellement abstruses et inintelligibles, qu'elles sont restées stériles et qu'il a fallu que Fibonacci réimportât de nouveau l'arithmétique arabe chez les Chrétiens, au commencement du XIII[me] siècle (1). Guillaume de Malmesbury, en signalant lui-même l'obscurité de ces règles, « *quæ a sudantibus Abacistis vix intelliguntur* », a paru favoriser cette interprétation.

Cependant, plusieurs érudits ont refusé d'admettre que le texte de Gerbert pût se rapporter à notre arithmétique (2); et l'on a fait diverses autres hypothèses. Les uns y ont vu le *calcul digital* (3); d'autres la machine à compter des Romains, appelée *Abacus,* et semblable au *Suan-pan* des Chinois (4). Andrès, qui s'est beaucoup occupé de cette pièce, qui lui paraissait d'un puissant intérêt historique, y est revenu à plusieurs reprises dans son *Histoire de toutes les Littératures,* et a fini, après diverses autres conjectures, par émettre l'opinion qu'elle pouvait rouler sur l'*Algèbre* (5).

Dans cet état d'incertitude et d'hypothèses si diverses, il est un point cependant sur lequel on s'est accordé. On a cru que cette pièce, écrite en termes inintelligibles, ou même, suivant quelques-uns, en termes mystérieux,

---

(1) « It was probably owing to this obscurity of his rules and manner of treating the Arabian, or rather Indian arithmetic, that it made so little progress beetween his time and that of the Pisan. » Colebrooke, *Algebra of Brahmegupta and Bhascara;* p. LIII.

(2) North, *Observations on the introduction of arabic numerals into England,* Voir *Archaeologia, or Miscellaneous tracts relating to antiquity,* t. X, p. 367.—Peacock; *History of the Arithmetic.* Voir *Encyclopedia metropolitana;* Claims of Pope Sylvester the second, p. 415, 416.

(3) L'abbé Lebeuf dit « On voit (par le Traité de Gerbert) que les supputations se faisaient » alors par les doigts qu'on tenait tantôt droits, tantôt pliés, selon que les nombres étaient » simples ou composés, et cette science passait pour avoir son mérite. » *Recueil de divers écrits pour servir d'éclaircissement à l'Histoire de la France,* 1738, t. II, p. 85.—D. Ceillier, *Histoire générale des auteurs sacrés et ecclésiastiques,* t. XIX, p. 725. — Hervas; *Aritmetica delle nazioni,* p. 54.—Delambre, *Histoire de l'Astronomie ancienne*, t. I, p. 322. — Cette opinion se trouve aussi au nombre des hypothèses diverses émises par Andrès.

(4) *Dell' origine, de progressi e dello stato attuale d'ogni letteratura;* Parme, 1782—99, 7 v. in-4°, t. IV, p. 83.

(5) J. Leslie; *The philosophy of Arithmetic,* 2[e] édition, p. 111.

émanait, quel qu'en fût le sujet, des doctrines arabes que Gerbert aurait rapportées de Cordoue ou de Séville.

J'ai exprimé dans mon *Aperçu historique* une opinion toute nouvelle et très-différente de ces hypothèses, quant à l'objet du livre de Gerbert et quant à son origine. J'ai dit que, loin d'être d'origine arabe, il se rapportait précisément au système de numération que j'avais trouvé dans le passage de la Géométrie de Boèce, autre pièce non moins célèbre par son obscurité et les tentatives qu'on avait faites pour en deviner le sens.

Ce système de numération décrit par Boèce est identique, quant aux principes, à notre arithmétique actuelle, et n'en diffère en pratique qu'en ce seul point, qu'on faisait usage d'un *tableau à colonnes* pour indiquer les différents ordres d'unités décuples, ce qui permettait de marquer par une *place vide*, l'absence d'un nombre, que nous marquons aujourd'hui par un signe figuré; c'est-à-dire, en d'autres termes, que, dans ce système, le *zéro* était une *place vide* (1).

C'est après avoir donné cette explication du passage de Boèce (2), fondée sur la traduction littérale du texte, que j'annonçai que le Traité de Gerbert roulait sur le même système de numération (3).

Une histoire des événements du xme siècle, écrite par Richer, moine de Saint Rémi de Reims, ami de Gerbert, mise au jour en 1839, par M. Pertz (4), et comprise dans sa belle collection des Historiens d'Allemagne, contient un passage intéressant où s'est trouvée la confirmation de mon opinion.

Richer, après avoir dit que Gerbert a répandu, le premier, en France la connaissance de la musique, et qu'il excellait dans l'astronomie, ajoute qu'il s'était livré avec le même soin à la Géométrie, pour l'introduction de laquelle il fit faire par un ouvrier (un fabricant d'écus), un Abacus, c'est-à-dire, une tablette disposée pour le calcul; que cette tablette était divisée en vingt-sept colonnes longitudinales dans lesquelles Gerbert plaçait les neuf chiffres

---

(1) J'ai trouvé depuis qu'on faisait usage parfois du zéro, sous la forme d'un *rond*, pour quelques opérations accessoires qu'on exécutait à côté du tableau à colonnes.

(2) *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géométrie;* voir p. 414-467 et 557-558.

(3) « Nous persistons à le regarder (le Traité de Gerbert) comme imité du passage de Boèce, » et à penser qu'il roule sur un système de numération qui ne diffère de notre système actuel » qu'en un seul point, l'*emploi du zéro* qui y a été introduit postérieurement et a permis de » supprimer les colonnes. » (*Aperçu historique,* p. 507.)

(4) Richeri Historiarum libri IIII, ex codice seculi X autographo edidit G. H. Pertz serenissimæ familiæ Welfiæ ab historia scribenda. 1 vol. in-8°. Hanoveræ, 1839.

qui lui servaient à exprimer tous les nombres; qu'il avait fait exécuter mille caractères en corne à l'effigie de ces chiffres, au moyen desquels il effectuait sur l'Abacus les multiplications et les divisions. « Pour prendre une entière » connaissance de cet art, ajoute Richer en terminant, il faut lire l'ouvrage » que Gerbert a adressé à l'écolâtre C. (1). » Il s'agit probablement ici, comme l'a pensé M. Pertz, du Traité adressé à Constantin.

Ainsi, d'après Richer, la méthode de calcul enseignée dans le Traité de Gerbert se pratiquait avec *neuf caractères* ou *signes numériques*, sur un *tableau à colonnes;* et ces neuf signes suffisaient pour exprimer tous les nombres (2).

Cette succincte description concorde parfaitement avec l'opinion que j'avais émise sur la doctrine de Gerbert, et peut paraître, jusqu'à un certain point, la confirmer.

On trouve de plus, dans Richer, ce fait intéressant, que Gerbert avait fait confectionner mille caractères en corne, probablement des espèces de dés, à l'effigie des neuf chiffres, et avec lesquels il faisait les opérations arithmétiques sur son tableau à colonnes. L'usage alors était d'exécuter les opérations arithmétiques sur le sable; il est donc à croire que le procédé mécanique employé par Gerbert avait pour but d'initier les plus jeunes enfants à la connaissance de ce mode de calcul. Aussi prouverai-je ailleurs que Ger-

---

(1) In geometria vero non minor in docendo labor expensus est, cujus introductioni, abacum, id est tabulam dimensionibus aptam opere scutarii effecit. Cujus longitudini, in 27 partibus diductæ, novem numero notas omnem numerum significantes disposuit. Ad quarum etiam similitudinem mille corneos effecit caracteres qui per 27 abaci partes mutuati, cujusque numeri multiplicationem sive divisionem designarent; tanto compendio numerorum multidinem dividentes vel multiplicantes, ut præ nimia numerositate potius intelligi quam verbis valerent ostendi. Quorum scientiam qui ad plenum scire desiderat, legat ejus librum quem scribit ad C. grammaticum; ibi enim hæc satis habundanterque tractata inveniet. (*Monumenta Germaniæ historica;* scriptorum, t. III. Hannoveræ, 1830; in-f°, *voy.* p. 618.)

(2) Ce passage intéressant a été remarqué par M. Guérard, qui s'exprime ainsi dans un Rapport sur l'histoire de Richer, lu par cet académicien devant l'Académie des Inscriptions et Belles-Lettres : « Quoique de la Notice très-ample consacrée ici à Gerbert, il ne résulte pas » qu'il ait étudié les sciences chez les Arabes, néanmoins, entre les inventions qui lui sont » attribuées, il est fait mention de neuf chiffres dont il se servait pour exprimer tous les nom- » bres, *novem numero notas omnem numerum significantes disposuit,* passage d'une grande im- » portance, et qui se rapporte évidemment au système numérique fondé sur la valeur décu- » ple d'un chiffre placé à la gauche d'un autre. » Cette analyse de l'ouvrage de Richer a été lue à l'Académie dans sa séance du 6 décembre 1839, et imprimée dans le *Journal des Savants,* année 1840, août et septembre. *Voir* p. 470-489 et 535-556.

bert a, en effet, *contribué puissamment* à rétablir dans les Gaules l'usage de cette ancienne méthode des Romains, et que c'est là seulement la part que lui faisaient ses contemporains; car ils n'ont jamais dit, comme Guillaume de Malmesbury et tant d'autres après lui, que Gerbert eût rapporté cette doctrine de chez les Sarrasins, ni même qu'il l'eût enseignée le premier en France.

Richer nous apprend encore que Gerbert considérait la méthode de l'*Abacus* comme une *introduction à la Géométrie.* J'ai trouvé cette même idée dans beaucoup d'autres ouvrages, où il est dit expressément que c'est par cette méthode que les géomètres faisaient leurs calculs : plusieurs auteurs même appellent le *Tableau de l'Abacus*, la *Table des Géomètres.* Cela explique pourquoi Boèce a enseigné ce procédé de calcul dans sa *Géométrie*, et à la fin de son premier livre : c'était comme introduction au second livre, qui roule sur la Géométrie pratique.

S'il ne nous est pas parvenu des exemples de l'usage pratique de cette méthode, ce fait, qu'on a cru pouvoir opposer à mes opinions, s'explique aisément. Le système de l'*Abacus* n'était pas employé pour exprimer des nombres isolés ; la notation des sept lettres romaines I, V, X, L, C, D et M, suffisait pour cela; il n'était considéré que comme une *méthode de calcul*, comparable en quelque sorte à notre *Algèbre* moderne ; et cette méthode se pratiquait sur la *table couverte de poudre ;* procédé qui ne pouvait laisser de traces. Je traiterai ailleurs avec les développements nécessaires ce point important de l'Histoire de notre Arithmétique.

Je reviens à l'ouvrage de Gerbert. Bien qu'il roule sur la même doctrine que le passage de Boèce, et que ces deux pièces présentent autant d'obscurité l'une que l'autre, néanmoins elles ne sont pas entièrement identiques ; la partie la plus obscure dans chacune n'est pas la même; de sorte qu'elles se prêtent un mutuel secours et qu'elles se complètent, aux yeux de celui qui veut en pénétrer le sens.

En effet, le passage de Boèce contient deux choses : une description du système de numération, puis les règles de la multiplication et de la division.

Gerbert commence tout d'abord par ces règles, sans dire un mot du système de numération, ni de la manière de le pratiquer : deux choses qu'il suppose connues.

Dans Boèce, la partie principale était la description du système de numération : c'est celle que j'ai expliquée. Cette explication admise, les règles de la multiplication se comprennent d'elles-mêmes sans difficulté. Mais les règles de la division conservent toute leur obscurité, parce que les quelques

mots relatifs à chaque règle ne la décrivent pas, et indiquent simplement le nom de la méthode qui s'y applique, ou bien quelques-unes des opérations partielles qui y entrent; et, ce qui ajoute aux difficultés de divination, c'est que ces règles, différentes de nos méthodes actuelles, sont aujourd'hui absolument inconnues.

Je me suis donc borné à donner l'explication littérale de la partie où Boèce décrit le système de numération, laquelle était la plus importante, sans expliquer alors ce qui se rapporte aux règles de la division.

Dans Gerbert ces règles, bien que d'un style très-obscur, sont néanmoins plus détaillées que dans Boèce, de sorte qu'elles ne présentent pas le même degré de difficulté. Le Traité de Gerbert complète donc en quelque sorte celui de Boèce, comme je l'ai dit.

Le passage de Richer ne fait allusion, comme nous avons vu, qu'au système de numération, et conséquemment il ne répand aucune lumière sur le texte même de Gerbert.

C'est ce texte que je me propose d'expliquer. Je me suis aidé, dans ce travail, de différentes autres pièces semblables, notamment d'une de Bernelinus, l'un des disciples de Gerbert. Cet ouvrage est un Traité complet d'Arithmétique en quatre livres, comprenant l'exposition du système de numération, les règles de la multiplication et de la division, et le calcul des fractions. Il ne manque pas non plus d'une certaine obscurité, à tel point que, même après que j'eusse annoncé que cet ouvrage se rapportait au même système de numération que le passage de Boèce, quelques personnes ont refusé d'admettre cette opinion, par la raison, a-t-on dit, que les nombres y sont exprimés en chiffres romains, et qu'on ne saurait y voir le principe de la *valeur de position.* Mais ce sont précisément ces nombres écrits en chiffres romains qui facilitent l'intelligence de cette pièce, car ces nombres se rapportent à des exemples numériques qu'il suffit de suivre pas à pas pour découvrir le mécanisme du calcul, et comprendre ensuite plus aisément la partie abstraite où les principes eux-mêmes du système de numération sont décrits; principes dont la base est bien la *valeur de position.*

Le secours de ces exemples numériques manque dans la lettre de Gerbert, qui, par cette raison et surtout par son style particulier, singulièrement laconique, est restée jusqu'ici d'une obscurité impénétrable.

Pour donner l'explication complète de cette pièce et ne laisser aucun doute dans les esprits, j'ai donc jugé à propos de produire d'abord un des écrits postérieurs où l'on trouve, comme dans celui de Bernelinus, indépendamment d'un style moins laconique et moins obscur que celui de Gerbert,

la description du tableau de l'Abacus, l'exposition du système de numération, et des exemples numériques à l'appui des règles de calcul.

Si j'ai cité l'ouvrage de Bernelinus, c'est parce qu'il est connu et que plusieurs auteurs en ont parlé à diverses époques, sans qu'on ait su toutefois de quelle matière il traite véritablement. Mais il existe un très-grand nombre d'autres ouvrages semblables, c'est-à-dire d'autres traités d'arithmétique dans le système de l'Abacus; et même plusieurs de ces ouvrages, restés enfouis et ignorés au fond de nos bibliothèques, sont d'un style souvent assez clair, et sont plus propres que celui de Bernelinus à faire connaître, sans beaucoup d'efforts, les principes de ce système arithmétique et les méthodes qui y étaient en usage. En effet, depuis le xe siècle, d'où date le traité de Gerbert, ce mode de calcul, enseigné dans les écoles, s'est répandu et a fait de grands progrès. Les auteurs se sont familiarisés avec ses règles, d'abord assez abstruses, très-diverses et manquant de généralité; ils les ont généralisées et en ont rendu en même temps l'exposition plus simple et plus claire; leur style, en un mot, est devenu plus facile et leurs ouvrages plus intelligibles. On peut assigner à chacun une date assez probable, dans l'espace d'un siècle et demi qui sépare le xe siècle du commencement du xiie.

Je fixe cette limite du xiie siècle, parce que plus tard les traités d'arithmétique, sauf quelques exceptions, ne portent plus le nom d'*Abacus;* ils prennent presque tous celui d'*Algorisme.* Et ce qui distingue alors les nouveaux traités des anciens, c'est qu'on ne fait plus usage du *tableau à colonnes* et qu'on lui a substitué, en quelque sorte, l'usage exclusif du *zéro.* C'est à cette époque aussi qu'on a commencé à introduire les chiffres dans l'écriture.

Le passage d'un système à l'autre marque une ère nouvelle, et forme un point très-curieux de l'histoire de notre arithmétique.

C'est donc au commencement du xiie siècle que j'attribue les derniers traités écrits dans le système de l'Abacus proprement dit, lesquels sont les plus clairs et les plus faciles à comprendre. J'en citerai notamment trois de cette époque : l'un est de Gerland, auteur d'un *Traité du comput* dont il est fait mention souvent dans les ouvrages du moyen âge; le second est de Radulphe ou Raoul, frère du célèbre Anselme de Laon, et connu lui-même pour avoir écrit sur la musique; enfin le troisième, intitulé : *Regulæ Abaci*, est anonyme.

C'est ce dernier que je choisirai pour faire connaître avec facilité et évidence les principes du système de l'Abacus, ses règles de calcul, et la manière d'exécuter les opérations sur le tableau à colonnes. Il me suffira d'en donner la traduction, en n'y joignant que de courtes notes explicatives.

La connaissance préalable de ce Traité d'arithmétique facilitera ensuite l'intelligence du texte de Gerbert, qui, toutefois, exigera encore de fréquents commentaires.

Cet ouvrage de Gerbert a joué jusqu'ici un grand rôle dans notre histoire littéraire, parce qu'il a été à peu près le seul du même genre connu des érudits et sur lequel ils ont disserté. Quoique j'aie annoncé qu'il existe beaucoup d'autres ouvrages semblables dont je possède même déjà un assez grand nombre, néanmoins l'écrit de Gerbert conserve une très-grande importance historique, comme étant le plus ancien de cette époque connu jusqu'à ce jour, et comme étant aussi celui qui se rapproche le plus, par le style, du passage de Boèce, et qui atteste le mieux l'origine et l'antiquité de ce système de l'Abacus. J'ai donc dû m'appliquer à pénétrer, dans toutes ses parties, le sens de ce texte singulier, depuis si longtemps énigmatique.

L'explication que j'en donnerai, jointe à mon explication du passage de Boèce, justifiera pleinement, j'espère, les opinions que j'ai émises dans mon *Aperçu historique* et que j'ai reproduites depuis devant l'Académie, au sujet de ce système de l'Abacus transmis par les Romains, cultivé au moyen âge, et qui marque la véritable origine de notre arithmétique vulgaire.

Mais de là naissent une foule de questions et un vaste champ historique tout nouveau. Car il faut suivre ce système de l'Abacus à partir du Xe siècle, et étudier les modifications qu'il a subies dans sa forme et ses méthodes pour devenir précisément notre arithmétique actuelle; il faut rechercher notamment l'origine du *zéro* qu'on a substitué aux *places vides*, pour s'affranchir du *tableau à colonnes*; rechercher l'origine et le sens de quelques notions dérivées de l'arithmétique arabe, introduites au XIIe siècle, et qui ont si complétement induit en erreur les écrivains modernes qui ont cru y voir des preuves de l'origine orientale de notre arithmétique.

Après avoir suivi le système de l'Abacus dans ses propres développements et dans ses rapports avec l'arithmétique arabe, il sera intéressant de remonter au delà du Xe siècle, et de rechercher les plus anciennes traces de cette méthode chez les Chrétiens. Car si Gerbert passe pour avoir été, à cette époque, le restaurateur des sciences, cela ne signifie pas que tout souvenir s'en était perdu; ce serait plutôt un indice que déjà, depuis longtemps, de louables efforts étaient faits pour réunir les vestiges de l'antiquité, et préparer le mouvement auquel Gerbert a donné une si forte impulsion dans sa nombreuse et célèbre école de Reims.

Un sujet de recherches plus intéressant encore, sera de reprendre le

système de l'Abacus dans l'ouvrage de Boèce et d'en suivre les traces chez les Romains eux-mêmes; de savoir s'ils l'ont réellement mis en pratique, ou si cette doctrine n'a été qu'une simple spéculation que Boèce aurait insérée dans sa Géométrie pour la sauver de l'oubli.

Enfin, il faudra chercher à remonter jusqu'à Pythagore, à qui Boèce attribue l'invention de cette ingénieuse et si utile méthode.

Ces points principaux, et une foule de questions accessoires qui s'y rattachent incessamment, forment un ensemble de recherches de nature à présenter d'autant plus d'intérêt, que les résultats y sont toujours nouveaux et contraires à toutes les idées admises jusqu'ici, non-seulement sur l'origine de notre système de numération, mais encore sur les méthodes arithmétiques des Romains et des Grecs, auxquels on s'est accordé à refuser la connaissance du principe de la *valeur de position*, pour la réserver exclusivement aux Hindous et aux Arabes.

J'ai essayé de remplir ce cadre d'une *Histoire nouvelle de l'Arithmétique* chez les Occidentaux, dans un ouvrage à peu près terminé depuis longtemps, mais auquel diverses circonstances m'ont empêché jusqu'ici de mettre la dernière main. J'extrais aujourd'hui de cet ouvrage l'explication de la fameuse lettre de Gerbert. On concevra aisément ce qui peut me déterminer à cette communication partielle et en quelque sorte anticipée.

C'est sur la fin de 1836 que j'ai donné l'explication du passage de Boèce. Depuis j'ai annoncé, notamment en 1839 au sein de l'Académie, qu'un grand nombre de pièces sur cette doctrine de l'Abacus existaient encore, ignorées, dans les manuscrits du x[e] et du xi[e] siècle; que moi-même j'en avais déjà réuni un certain nombre, et qu'après les avoir lues toutes, je pouvais assurer qu'elles roulaient bien réellement sur le système de numération que j'avais découvert dans Boèce (1). J'ai appelé ainsi l'attention des érudits sur ces anciens traités, qui se trouvent dans les bibliothèques étrangères comme dans les nôtres. Il est donc à croire que plusieurs personnes auront pu les étudier et même en préparer l'explication. Quoi qu'il en soit, cette explication ne s'est point encore produite; et si quelques érudits ont manifesté leur adhésion à mon système et ont puisé même dans des documents d'une autre nature des exemples propres à le confirmer (2), d'autres ont continué de développer des systèmes contraires

---

(1) *Voir* les *Comptes rendus de l'Académie*, t. IX, p. 450; séance du 7 octobre 1839.

(2) Je rappellerai que M. Halliwell, dans un écrit qu'il a bien voulu considérer comme un appendice au chapitre de mon *Aperçu historique* où j'ai donné l'explication du passage de Boèce, a cité, à l'appui de mon opinion sur ces anciennes pièces qui portent le nom d'*Aba-*

aux résultats de mes propres recherches. On m'a invité à ne plus différer de produire des preuves décisives, moins encore pour ne pas perdre la priorité qui pourrait m'appartenir, que pour influer dans le sens de la vérité sur les recherches des érudits qui s'occupent de cette matière, et pour faciliter à tous l'explication de ces textes si curieux et si féconds en conséquences historiques (1).

Je rappellerai, en terminant, que nos chiffres actuels sont différents des

---

cus, plusieurs manuscrits des bibliothèques de Londres, d'Oxford et de Cambridge, qui contiennent de pareilles pièces et dans lesquelles cet érudit trouvait la *valeur de position clairement exprimée*.

Depuis, M. Vincent a découvert dans un passage obscur de Julius l'Africain une manière d'exprimer les nombres par des signaux avec valeur de position.

Enfin M. Boeckh, dans une dissertation au sujet d'une pierre trouvée à Athènes par M. Müller, sur laquelle sont des nombres exprimés dans le système alphabétique des Grecs, avec un certain signe pour marquer l'absence des unités quand le nombre ne comprend que des dizaines; M. Boeckh, disons-nous, a considéré ce fait intéressant comme tendant à prouver que les Grecs avaient connu, à une époque reculée, le principe de la valeur de position des chiffres; et, à ce sujet, il a donné son assentiment à mon explication du passage de Boèce, qu'il adopte entièrement.

Cette explication repose, comme on sait, sur l'idée que ce n'est pas la *table de multiplication* que Boèce décrit sous le nom d'*Abacus seu Mensa Pythagorica,* ainsi qu'on l'avait cru, mais bien un *tableau à colonnes* préparé pour la pratique de l'arithmétique avec neuf chiffres prenant des valeurs de position. Voici en quels termes M. Boeckh approuve cette partie de mon travail : « Boethianus abacus duodecim ordines complectitur. Ejus loco in editis Boethii libris tabula vulgaris multiplicationis conspicitur, quam ejiciendam esse egregie evicit Chasles, abacum restituens ex codice Carnotensi Boethii saec. XI scripto. » (Voir *Index lectionum quæ in universitate litteraria Frid. Guilelma per semestre æstivum A.* 1841 *instituentur.* Berolini, p. II-XII.)

(1) Plusieurs personnes s'occupent dans ce moment d'un catalogue général des bibliothèques des départements, sous les auspices de M. le Ministre de l'Instruction publique. Je ne doute pas qu'on ne découvre beaucoup de pièces sur le système de l'Abacus. Il sera intéressant surtout de rechercher dans ces pièces les quelques notions historiques qui s'y trouvent parfois. Ce travail d'un catalogue général pourra procurer aussi la connaissance de quelques traités d'algorisme du XIIe siècle. Car c'est bien de cette époque, et même du premier tiers de ce siècle, et non du XIIIe siècle seulement, comme on l'a cru jusqu'ici, que datent nos plus anciens traités d'algorisme. Ce terme *algorisme* est le nom qu'on a donné à l'arithmétique de position, quand on a cessé de se servir du *tableau à colonnes* appelé *Abacus*. La transition a eu lieu dans le premier tiers du XIIe siècle. C'est à cette époque aussi que se sont introduites les premières notions sur l'arithmétique arabe. On peut les trouver non-seulement dans les traités d'algorisme, mais aussi dans des traités de l'Abacus; et dans ceux-ci, elles seront d'un grand intérêt, puisqu'elles pourront prouver la différence d'origine des deux méthodes. Je possède déjà un traité de l'Abacus qui contient de pareilles notions : de sorte que ce n'est pas sur une simple con-

chiffres arabes, nonobstant leur dénomination vulgaire, et qu'ils ont une ressemblance non douteuse avec les *apices* de Boèce, lesquels ont été aussi les chiffres en usage au moyen âge dans les nombreux traités de l'Abacus. Ce fait n'a pu être méconnu, mais on l'a expliqué en considérant ces apices comme d'anciennes notes tironiennes servant à exprimer les grands nombres et que les Chrétiens auraient introduites dans l'arithmétique arabe. Aujourd'hui cette explication n'est plus possible. Il faut reconnaître que nos chiffres avaient dans Boèce la même signification qu'à présent. La vérité de l'histoire, et l'esprit de justice envers le moyen âge qui a renouvelé de l'antiquité et nous a transmis cette ingénieuse méthode de calcul, demandent donc que nous renoncions à ces expressions fausses de *chiffres arabes, arithmétique arabe* reproduites journellement dans nos ouvrages. Assurément on dirait *chiffres de Boèce,* ou peut-être même de *Pythagore,* ce qui est un point que j'examinerai plus tard (1), si la vérité n'était parfois sacrifiée à l'usage.

Analyse d'un Traité de l'Abacus.

Je fais précéder d'une analyse le traité de l'Abacus que je traduirai en-

---

jecture, seulement probable, que je me fonde pour recommander à toute l'attention des personnes qui explorent les manuscrits de nos départements, les anciennes pièces arithmétiques et toutes les traces subsistantes du système de l'Abacus.

(1) L'objection principale qu'on m'a opposée à ce sujet, c'est-à-dire contre l'idée que le système de l'Abacus ait été connu des Grecs, a été basée sur le traité d'Archimède *De numero arenæ,* désigné généralement sous le nom d'*Arénaire.* On a cru que ce livre avait pour objet de simplifier la numération des Grecs, et que l'auteur ne l'aurait pas écrit s'il avait connu le système de l'Abacus. J'ai combattu cette objection en présentant une analyse rigoureuse de cet ouvrage, analyse dont voici la conclusion :

« 1°. C'est une erreur de penser que le livre *De numero arenæ* n'a d'autre but que de simplifier la numération des Grecs, parce que, en réalité, il a un but spécial tout différent;

» 2°. Il n'y a pas lieu de dire que si Archimède avait connu le système de l'Abacus, il n'aurait pas composé son livre ou qu'il l'aurait fait différemment;

» 3°. Et enfin, ce qui est plus concluant encore, aucune des considérations arithmétiques qui se trouvent dans cet ouvrage n'autorise à penser qu'Archimède n'a pas connu le système de l'Abacus. » (Voir les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences;* t. XIV, p. 547-559, séance du 11 avril 1842.)

J'ajouterai que, pour induire du livre d'Archimède que l'auteur n'a pas eu connaissance du système de l'Abacus, il faudrait montrer *quel parti il eût tiré de ce système ; — dans quels passages de son livre il en eût fait usage ; — quels avantages, quelles simplifications en seraient résultés.* — Faute de répondre à ces questions, on ne peut être admis à m'opposer le livre d'Archimède.

suite littéralement. Cette analyse donnera une idée de la forme et du contenu de ces anciens traités d'Arithmétique, en même temps qu'elle préparera à l'intelligence de l'ouvrage lui-même.

I. L'auteur dit que l'art appelé *Abacus* traite de la *multiplication* et de la *division* des nombres.

C'est là le but que tous les autres traités de l'Abacus assignent aussi à cette méthode.

II. L'auteur explique la forme du *tableau* auquel s'applique proprement le terme *Abacus*, et qu'il appelle lui-même, dans la suite, *Abacus*. Ce tableau se compose de *colonnes* consécutives, au haut desquelles sont figurés les nombres I, X, C, M, XM, etc. L'auteur dit qu'on se sert sur ce tableau de *neuf caractères* représentant les nombres *un, deux, trois, quatre, ..., neuf,* lesquels suffisent pour faire toutes les multiplications et les divisions en nombres entiers, quand on les place dans les colonnes du tableau. A cet effet, les caractères placés dans la première colonne y représentent des unités simples, dans la deuxième colonne, des nombres décuples de ces unités; dans la troisième colonne, des nombres centuples; etc.

C'est, comme on voit, le principe de la *valeur de position* des chiffres; comme dans notre arithmétique vulgaire.

L'auteur décrit les neuf caractères qui sont, sauf quelques légères altérations produites par le temps, les *apices* de Boèce. Il donne aussi les noms *igin, andras, ormis, arbas, quimas, calcus, zenis, temenias* et *celentis* de ces caractères, mais il ne s'en sert pas.

Au contraire, quelques auteurs du même temps, notamment Gerland et Radulphe de Laon, dénommaient par ces termes les neuf chiffres dans le texte même de leurs ouvrages, en décrivant les règles et les détails des opérations arithmétiques. Mais beaucoup d'autres ne font nullement mention de ces noms; ce qui nous porte à croire que ces noms *igin, andras,* etc., quoique, dans plusieurs manuscrits, ils se trouvent au haut du tableau qui fait partie du passage de Boèce, ont été introduits assez tard dans l'Abacus. Je reviendrai sur cette question qui serait ici prématurée et hors de propos.

L'auteur appelle les colonnes *arcs* (*arcus*). Il ne dit pas la raison de ce terme. Je la trouve dans beaucoup d'autres ouvrages: c'est que ces colonnes étaient surmontées d'arcs de cercle dans lesquels on plaçait les nombres I, X, C, M, etc. Plusieurs auteurs, Bernelinus notamment, parlent de ces arcs; en outre, on les voit dans des tableaux de l'Abacus, figurés soit isolément dans quelques manuscrits, soit dans le passage de Boèce, ou bien fai-

sant partie de traités dans lesquels les calculs sont figurés en chiffres dans des colonnes.

Quelques auteurs disent aussi qu'on décrit de plus grands arcs de cercle embrassant les colonnes trois à trois. Cela avait pour but principalement de faciliter l'énonciation des nombres. C'est l'origine de la division des nombres en tranches de trois chiffres, par des *points* ou des *virgules,* qui a été en usage jusqu'à ces derniers temps.

III. L'auteur se sert des expressions *digit, article* (*digitus, articulus*). Il appelle *digits* les neuf premiers nombres naturels *un, deux, trois,* ..., *neuf,* et *articles* les multiples de ces nombres par *dix, cent,* etc. Tous les autres nombres, tels que XI, XII, etc., composés d'un digit et d'un ou plusieurs articles, s'appellent *nombres composés.*

Ces expressions *digits, articles,* existent dans le passage de Boèce, et elles se trouvent dans tous les autres traités de l'Abacus du moyen âge. Elles paraissent avoir été inhérentes à ce système de numération. Elles ont passé dans les traités d'*algorisme,* où on les trouve sans interruption jusque dans le cours du XVIIe siècle, avec la même signification. Ce n'est que dans les ouvrages plus modernes qu'on a cessé d'en faire usage; et insensiblement on a perdu le souvenir de la valeur de ces termes. De là l'erreur de plusieurs écrivains, qui ont cru qu'ils se rapportaient au *calcul par les doigts,* et qui en ont conclu que le livre de Gerbert, notamment, roulait sur ce procédé.

IV. Toutefois l'auteur dit que ces expressions *digits, articles,* proviennent de la manière d'exprimer les nombres par les doigts; et, à ce sujet, il décrit cette manière tout au long, telle qu'on la trouve enseignée par Bède, par Raban Maur, etc. On sait qu'une foule d'auteurs latins, de tous les âges, présentent des traces de cet ancien procédé.

Quant à savoir si les expressions *digits, articles,* en usage dans le système de l'Abacus, proviennent du *calcul digital,* la question est douteuse, car quelques auteurs, dans leurs traités de l'Abacus, donnent une autre explication de ces expressions.

V. L'auteur passe à la multiplication et à la division. Il commence par la multiplication, dont il distingue quatre cas : la multiplication *simple* ou *composée ; continue* ou *avec intermission.* Ces distinctions ne se rapportent qu'à la manière dont le multiplicateur est formé.

La multiplication est *simple,* quand le multiplicateur est exprimé par un seul caractère, étant par conséquent un digit ou un article; elle est composée, quand le multiplicateur est exprimé par plusieurs caractères. L'auteur dit alors qu'il y a plusieurs *multiplicateurs,* autant que de caractères. Ainsi, si

le nombre par lequel on doit multiplier est 3405, l'auteur dit que les *multiplicateurs* sont 3000, 400, et 5. Il dit pareillement les *multiplicandes,* quand le nombre qu'on multiplie est exprimé par plusieurs chiffres.

La multiplication est *continue* quand les multiplicateurs se suivent sans interruption, c'est-à-dire sans qu'il y ait de *colonnes vides* entre eux. Elle est *avec intermission* quand il y a une ou plusieurs colonnes vides entre les caractères qui expriment les multiplicateurs.

Du reste, l'auteur dit que la multiplication se fait dans tous les cas de la même manière.

VI. Pour en donner un exemple, il multiple 4 600 par 23. On pose les multiplicandes 4 000 et 600 au haut des colonnes, les multiplicateurs 20 et 3 au bas, et les produits au milieu du tableau.

On commence l'opération par la droite; de sorte qu'on multiplie 600, puis 4 000, d'abord par 3, et ensuite par 20.

Les règles que l'auteur donne dans le cours de l'opération ont pour objet de faire connaître dans quelles colonnes on doit placer les deux chiffres dont se compose, en général, chaque produit partiel, et qui expriment, l'un un digit, et l'autre un article. Par exemple, la règle relative à la multiplication par un nombre de l'ordre des dizaines s'énonce ainsi : « Quand » un nombre de la colonne des dizaines multiplie un nombre d'une autre co- » lonne quelconque, placez le digit dans la deuxième colonne, à partir de » celle du multiplicande, et l'article dans la colonne suivante. » Ainsi, qu'on multiplie 600 par 20, le produit est 12. Dans ce nombre, *deux* est le digit, et une dizaine l'article. On placera donc *deux* dans la colonne des mille, et l'unité dans la colonne de dix mille; de sorte que le produit véritable est 12000.

VII. Une multiplication se compose de produits partiels dont il faut faire la somme : à ce sujet, l'auteur donne la règle de l'*addition,* qu'il appelle *purgation* (*purgatio*). Il dit qu'on purge les colonnes des divers caractères qui s'y trouvent, en les remplaçant par un moindre nombre de caractères. La règle est ainsi : quand on ajoute plusieurs caractères placés dans la même colonne, s'il en résulte un digit, ce digit reste dans la colonne; s'il en résulte un article, il passe dans la colonne suivante. Enfin, s'il provient un article et un digit, le digit demeure dans la colonne, et l'article passe dans la colonne suivante.

VIII. L'auteur a énoncé, dans le § VI, les règles pour la multiplication par un nombre de l'ordre des unités, puis par un nombre de l'ordre des dizaines. Maintenant il donne les règles pour la multiplication par un

nombre des centaines, puis des mille, etc.; et enfin, il exprime toutes ces règles sous ce seul énoncé général : « Autant la colonne qui multiplie est » éloignée de celle des unités, autant le digit sera éloigné de la colonne » du multiplicande : et l'article sera toujours placé dans la colonne ultérieure. »

IX. De la *division.* Cette opération se fait de deux manières : *sans différences* et *avec différences.*

Le nombre à diviser s'appelle le *dividende* quand il s'exprime par un seul caractère, et les *dividendes* quand il s'exprime par plusieurs caractères. Il en est de même du nombre par lequel on divise : on l'appelle le *diviseur* ou les *diviseurs.* Ainsi, si l'on a à diviser 3025 par 407, on dit que les dividendes sont 3000, 20 et 5, et les *diviseurs* 400 et 7. Le diviseur de l'ordre le plus élevé s'appelle le *plus grand diviseur,* et les autres, les *diviseurs inférieurs.* Il en est de même des dividendes.

On distingue quatre sortes de divisions, de même que quatre sortes de multiplications : la division *simple* ou *composée; continue* ou *avec intermission.* La division est *simple* quand il n'y a qu'un diviseur, quel que soit le nombre des dividendes; *composée* quand il y a plusieurs diviseurs; *continue* quand les diviseurs se suivent continûment sans interposition de colonnes vides; et *avec intermission* quand il y a des colonnes vides entre les diviseurs.

La méthode *sans différences* est la même que notre méthode actuelle; seulement, à chaque division partielle, on déplace le diviseur (nous parlons de la division simple), pour le transporter sur le plus grand dividende, ou bien à un rang à sa droite, si ce diviseur est plus grand que le dividende. Ainsi, a-t-on à diviser 546 par 3, on transporte 3 sur le dividende 500, dans la colonne des centaines, et l'on divise 5 par 3; le quotient est 1, et il reste 2 qui demeure dans la colonne des centaines. Le diviseur étant plus grand que 2, on le transporte dans la colonne à droite du dividende, c'est-à-dire dans la colonne des dizaines, et l'on regarde 2 comme exprimant l'article 20; on divise donc 20 par 3, et ainsi de suite. Notez que l'on divise 20 et non pas 24, ainsi que nous ferions aujourd'hui. On n'opérait alors que sur un dividende simple et non sur un dividende composé, ou, comme on aurait dit alors, sur deux dividendes à la fois. Il en résulte que l'opération était plus longue qu'à présent; à part cela elle était la même.

On trouve encore dans des traités d'Arithmétique du XVIe siècle, ce procédé *par le déplacement du diviseur.* Dans quelques traités de l'Abacus on enseignait aussi à faire la division *sans déplacement de diviseur,* comme nous faisons actuellement.

L'auteur appelle *dénomination* chaque quotient partiel. En général, dans les traités de l'Abacus, le terme *dénomination* s'entend de la valeur absolue du caractère qui exprime un article. Ainsi, 3 est la dénomination de l'article 30 ou 300, etc. L'auteur emploie aussi le terme dénomination dans cette acception générale.

X. Pour donner un exemple de la division simple, *sans différence*, l'auteur divise 30 par 2; il place les diviseurs dans la partie supérieure du tableau, le dividende au-dessous, les dénominations dans la partie inférieure du tableau, et les *restes* au milieu. Il donne, dans le cours de l'opération, la règle de la *soustraction;* car il faut soustraire du dividende le produit du diviseur par la dénomination. Cette règle de la soustraction consiste à prescrire dans quelles colonnes se placent les restes; elle s'énonce ainsi : « Si » d'un digit il reste un digit, il ne change pas de colonne; si d'un article il » reste un article, il ne change pas de colonne; si d'un article il reste un digit » et un article, l'article ne change pas de colonne, le digit en change. »

XI. *Du placement de la dénomination.* Quand le diviseur est un digit, c'est-à-dire un nombre de l'ordre des unités, on place toujours la dénomination dans la colonne même où ce diviseur a été transporté, soit au-dessus, soit à la droite du dividende. Quand le diviseur est un article, dizaines ou centaines, etc., la dénomination se place à un ou à deux rangs, etc., après le diviseur transporté. L'auteur énonce à ce sujet cette règle générale : « A » quelque rang, au delà de la colonne des unités, que soit primitivement le » diviseur, on place la dénomination à un pareil rang après le diviseur » transporté. »

XII. *De la division composée.* Elle est *continue* ou *avec intermission.* La règle est la même dans les deux cas. On transporte le plus grand diviseur (le diviseur de l'ordre le plus élevé) sur le plus grand dividend s'il est moindre que ce dividende, ou s'il lui est égal; ou bien à un rang avant lui (vers la droite), s'il est plus grand, de même que dans la division simple; et pour le placement de la dénomination, on suit la règle énoncée pour le cas d'un diviseur simple appartenant à une colonne quelconque.

XIII. Exemple de la division composée, *avec intermission.* L'auteur divise 100000 par 20023. On transporte le plus grand diviseur 2 dans la colonne immédiatement inférieure à celle du dividende cent mille, c'est-à-dire dans la colonne des dix-mille, parce que 2 est plus grand que 1. Ensuite on dit: en 10 combien de fois 2? Il y est 5 fois; mais il ne faut pas prendre 5 pour dénomination, parce qu'on ne pourrait retrancher du dividende le produit des diviseurs inférieurs 20 et 3 par la dénomination. Il faut prendre 4, etc.

On voit que c'est notre procédé actuel, sauf le déplacement du diviseur, déplacement qui, comme nous l'avons dit, se trouvait encore dans les ouvrages du XVI[e] siècle.

XIV. De la division *avec différences*. Cette méthode, qui n'est plus en usage, et qui même n'est plus connue de nos jours, paraît dans sa forme différer complétement de notre procédé actuel, quoiqu'au fond elle dérive du même principe et des mêmes considérations. L'auteur en expose les procédés, mais sans démonstration, et sans paraître en connaître le principe. Il en est de même dans tous les autres traités de l'Abacus que nous avons consultés. Voici comment on peut se rendre compte de cette méthode. Elle paraît avoir eu pour but d'éviter les incertitudes et les tâtonnements de la première méthode, et d'obtenir toujours un quotient admissible. Elle consiste à diviser le nombre proposé par un diviseur fictif, plus grand que le diviseur réel. Si celui-ci est un digit ou un article, on prend 10 pour diviseur fictif. De cette manière, la dénomination est simplement le dividende tout entier, c'est-à-dire le plus grand dividende; car on ne divise jamais, dans chaque opération partielle, qu'un nombre simple. Après cela, il faudrait multiplier le diviseur par la dénomination pour soustraire le produit du dividende. Au lieu de cette opération, on opère par les *compléments arithmétiques;* on multiplie par la dénomination le *complément* du diviseur, qu'on appelle sa *différence à dix*, et on regarde le produit comme un nouveau dividende. Ainsi, divisons 43 par 7; la *différence* du diviseur est 3; la dénomination répondant au diviseur fictif 10 est 4; le produit de la différence par cette dénomination est 12 : on ajoute ce produit au dividende inférieur, et l'on a pour nouveau dividende $3 + 12 = 15$. C'est comme si l'on avait multiplié le diviseur réel 7 par la dénomination 4, et retranché le produit 28 du dividende 43. Divisant de même 15 par 10, on a 1 pour dénomination, 3 pour le produit de la différence par cette dénomination, et $5 + 3 = 8$ pour nouveau dividende. Ici l'on ne peut plus opérer par la même méthode, puisqu'il faudrait diviser par 10; alors on revient à la première méthode, c'est-à-dire qu'on divise 8 directement par 7. La dénomination est 1, et il reste 1. Les dénominations partielles sont donc 4, 1 et 1; de sorte que le quotient total est 6, et le reste est 1.

On peut encore se rendre compte de cette manière de procéder, en remplaçant le diviseur par le binome $(10 - 3)$. On aura à diviser 40 par $(10 - 3)$; le quotient est $\frac{40}{10} = 4$, et le reste $\frac{40}{10} \times 3 = 12$. Mais on peut douter que ce soit cette considération de la division par un binome, qui ait

conduit les Anciens à cette méthode. Je dis les Anciens, car cette méthode se trouve dans le passage de Boèce.

On remarquera que ce procédé de calcul, qui consiste, au fond, à diviser par 10, conduisait immédiatement aux *fractions décimales*. Mais les auteurs n'ont pas eu l'idée de ces fractions. On ne trouve, dans tous les traités de l'Abacus, que la théorie et l'usage des fractions romaines.

XV. L'auteur donne un exemple de la division simple *avec différence*. Il divise 900 par 8.

XVI. De la division composée, *par les différences*. Si l'on a à diviser par plusieurs diviseurs, par exemple par 352, on prend pour diviseur fictif l'article immédiatement supérieur au plus grand diviseur. Ici ce sera 400. On divisera donc, dans chaque opération partielle, par 4; et, au lieu de retrancher du dividende le produit des diviseurs inférieurs, 50 et 2, par la dénomination, on ajoutera le produit du *complément arithmétique* de ces diviseurs, savoir, 48, par cette dénomination. Cela revient à remplacer le diviseur 352 par le binome (400 — 48).

Ce complément arithmétique 48 s'appelle *les différences* des diviseurs. On dit que 8 est la *différence entière* (*differentia integra*) du diviseur 2, et 4 la *différence moins un* (*differentia uno minus*) du diviseur 50.

L'auteur applique cette méthode à la division de 7 800 par 166.

XVII. Quand, dans l'expression des diviseurs, il y a des colonnes vides, auquel cas on dit que la division est *avec intermission*, la méthode demeure la même : ainsi, a-t-on à diviser par 60402, on divisera par 7, et on multipliera par la dénomination le complément arithmétique des diviseurs inférieurs, savoir, 9598. La manière dont l'auteur s'exprime pour former ce nombre 9598 mérite d'être remarquée : il dit que sur le dernier diviseur 2 on place sa *différence entière*, sur le diviseur 4 la *différence moins un*, et dans les colonnes vides des *neuf*, pour servir de multiplicateurs en même temps que les différences.

Pour donner un exemple de cette règle, l'auteur divise 8000 par 606.

XVIII. L'auteur observe que si l'on divise par un nombre qui contient des *neuf* (tel que 1994), on n'a à multiplier par la dénomination que la *différence* du dernier diviseur, et l'on se garde bien de multiplier les 9 comme on le faisait dans l'opération précédente.

XIX. Enfin l'auteur cherche à expliquer pourquoi on prend, dans la division simple, le plus grand dividende tout entier pour dénomination, et dans la division composée, une partie seulement du dividende, laquelle partie est $\frac{1}{2}$ si le plus grand diviseur est 1; $\frac{1}{3}$, s'il est 2; $\frac{1}{4}$, s'il est 3, etc. Voici la singulière raison qu'il donne : Dans la division simple, c'est parce

que le diviseur, joint à sa différence, donne dix; dans la division composée, c'est parce que les diviseurs inférieurs, joints à leurs différences et aux *neuf* placés comme multiplicateurs dans les colonnes vides, donnent une unité qui s'ajoute au plus grand diviseur, et forme une somme dont cette unité est la moitié quand le plus grand diviseur est 1; le tiers quand il est 2; le quart quand il est 3, etc. D'où il suit qu'on doit prendre la moitié du dividende quand le plus grand diviseur est 1; le tiers quand il est 2, etc.

J'ai cherché en vain une autre explication dans d'autres traités de l'Abacus : c'est toujours à peu près la même qu'on y trouve.

Traduction littérale du Traité de l'Abacus dont l'analyse précède.

« RÈGLES DE L'ABACUS.

I. — *Objet de l'Abacus* [1].

L'art dont on va parler se nomme *Abacus;* ce nom est arabe [2] et signifie *table,* parce que l'une et l'autre chose ont cela de commun qu'elles sont formées de planches. L'*Abacus* traite de la multiplication et de la division des nombres. En voici l'objet et la méthode. Son utilité est de savoir multiplier et diviser les nombres d'une manière ingénieuse et abrégée. Si l'on ignore comment se fait l'Abacus, on le saura après avoir entendu ce qui va suivre.

II. — *Description du* Tableau à colonnes. *Usage de neuf caractères. Noms et formes de ces caractères. Valeurs de position qu'ils prennent dans les colonnes.*

On dispose plusieurs espaces, à côté l'un de l'autre, douze ou un plus plus grand nombre, qu'on appelle *arcs* ou colonnes.

Dans la première colonne, on écrit l'*unité;* dans la deuxième, le nombre qui est décuple de l'unité, c'est-à-dire *dix;* et des autres nombres qui sont écrits dans les autres colonnes, chacun est décuple de celui qui lui est immédiatement inférieur [3].

---

(1) J'ai marqué les différentes parties de ce Traité par des numéros et des titres qui n'existent pas dans le texte latin, où l'on ne trouve même ni ponctuation ni alinéas, suivant l'état ordinaire des Mss. du XIIe siècle. Ces numéros et ces titres faciliteront la lecture de l'ouvrage et l'intelligence des règles qui y sont décrites; ils tiendront lieu, jusqu'à un certain point, de commentaires.

(2) Le mot *Abacus* n'est point *arabe.* Il se trouve chez les auteurs latins les plus anciens; il a été formé du mot grec ἄβαξ. Dans plusieurs Traités de l'Abacus cette origine grecque est reconnue. Il est inutile de nous arrêter ici à cette prétendue origine arabe, à laquelle une simple assertion ne peut donner d'importance.

(3) C'est-à-dire *antérieur,* car ces nombres I, X, C, M, etc., sont écrits sur une même ligne horizontale, en allant de droite à gauche.

La première colonne, qui contient l'unité, s'appelle elle-même *singularis* (colonne des unités); la deuxième, *decenus* (colonne des dizaines); la troisième, *centenus* (colonne des centaines); la quatrième, *millenus* (colonne des mille), etc.; les suivantes prennent semblablement le nom des nombres qui y sont inscrits.

Dans ces colonnes, préparées pour multiplier et diviser, on place divers caractères, au nombre de neuf, qui suffisent pour faire toute multiplication et division en nombres entiers. Et ces neuf caractères appartiennent proprement à la première colonne.

Dans la première colonne on écrit l'unité, dans la deuxième deux, dans la troisième trois, dans la quatrième quatre, dans la cinquième cinq, dans la sixième six, dans la septième sept, dans la huitième huit, dans la neuvième neuf.

Ces nombres ont la forme et les noms décrits ci-dessous :

Igin	Andras	Ormis	Arbas	Quimas	Calcus	Zenis	Themenias	Celentis
I								

Après avoir fait connaître les figures et les noms de ces caractères, je dirai qu'on devra mettre I dans la colonne des unités pour exprimer une unité simple; pour deux unités; et en continuant de cette manière on exprimera les autres nombres jusqu'à dix, en posant les autres caractères dans la même colonne.

Mais si vous voulez avoir X, posez I dans la colonne des dizaines; pour exprimer XX, posez dans la même colonne. Bref, quelque caractère qu'on pose dans une colonne quelconque, il y marque autant de fois le nombre de cette colonne [1], que ce caractère indique d'unités; de sorte que si ce caractère indique une unité, dans quelque colonne qu'il soit placé, il marque une fois le nombre de cette colonne; s'il indique deux, il marque deux fois ce nombre. Et ainsi des autres. D'après cela, les caractères exprimant ce qui n'est pas exprimé par les colonnes, et d'un autre côté les colonnes exprimant ce qui n'est pas exprimé par les caractères [2], ces IX caractères placés convenablement dans les colonnes suffisent, comme nous venons de le dire, pour faire toutes les multiplications et les divisions.

---

(1) C'est-à-dire le nombre I, ou X, ou C, ou M, etc., inscrit au haut de la colonne.

(2) L'auteur veut dire que les caractères doublent, triplent, quadruplent, etc., les nombres I, X, C, M, etc., inscrits au haut des colonnes, et que les colonnes décuplent, centuplent, etc., les nombres exprimés par les caractères.

III. — *Définition des digits et des articles.*

Après cette succincte explication, il faut parler des nombres; car les uns sont *digits*, les autres *articles*.

Les *digits* sont tous les nombres jusqu'à dix; dix est un *article;* les multiples de dix sont de même des articles.

Les autres nombres, comme XI, XII, et les suivants jusqu'à XX, sont composés d'un digit et d'un article; en un mot, il en est de même de tous les nombres qui ne sont ni dix, ni des multiples de dix. Il faut remarquer que, de même que tous les nombres jusqu'à dix sont des digits par rapport à X, de même X et les autres articles jusqu'à cent sont des digits par rapport à cent; cent et les autres centaines jusqu'à mille sont des digits par rapport à mille, et ainsi de toute unité inférieure par rapport à l'unité immédiatement supérieure.

Les nombres depuis un jusqu'à dix s'appellent *digits*, parce qu'on les exprime en fléchissant ou en étendant les doigts.

IV. — *Calcul digital.*

Par exemple, quand nous voulons exprimer *un*, nous courbons le petit doigt de la main gauche en l'appliquant sur le milieu de la main.... [1]

V. — *De la multiplication. Diverses espèces de multiplication : simple, composée, continue, avec intermission.*

Traitons maintenant de la multiplication et de la division; et d'abord de la multiplication.

La multiplication est *simple* ou *composée*. Elle est simple quand il y a un seul multiplicateur, quel que soit le nombre des multiplicandes. Elle est composée quand il y a plusieurs multiplicateurs, lors même qu'il n'y a qu'un multiplicande.

La multiplication composée est *continue* ou *avec intermission*. Elle est *continue*, quand les multiplicateurs se suivent continûment dans leurs colonnes, comme si le premier est placé dans la colonne des unités, le deuxième dans la colonne des dizaines, le troisième dans la colonne des centaines, le quatrième dans la colonne des mille, s'ils sont en tel nombre; ou bien si plusieurs multiplicateurs sont placés de telle manière qu'il n'y ait entre eux aucune colonne vide. La multiplication est *avec intermission* quand, les multiplicateurs étant placés, il se trouve une ou plusieurs colonnes vides entre eux.

---

[1] Je passe ici, pour accourcir cette traduction qui sera encore bien longue, la description du calcul digital, qu'on trouvera dans le texte latin.

Mais, comme la multiplication composée ne présente pas plus de difficulté que la multiplication simple, ou bien la multiplication avec intermission que la multiplication continue, revenons à la multiplication en général; et, pour montrer la diversité de ses règles, commençons par la colonne des unités, en posant quelques multiplicateurs et un nombre à multiplier.

VI. — *Exemple de la multiplication :* 4600 *à multiplier par* 23 [1].

Posons trois dans la colonne des unités et deux dans celle des dizaines, comme multiplicateurs; six dans la colonne des centaines et quatre dans celle des mille, comme multiplicandes; les multiplicateurs étant dans les places inférieures (c'est-à-dire dans la partie inférieure des colonnes) et les multiplicandes dans les places supérieures, on posera dans l'espace du milieu ce qui proviendra de la multiplication : les multiplicateurs et les multiplicandes étant donc placés, disons en commençant par les unités : trois fois six font XVIII; voici la règle : quand un nombre de la colonne des unités multiplie un nombre d'une autre colonne quelconque, posez le digit dans celle-ci, et l'article dans la colonne suivante. Posons donc VIII, qui est le digit, dans la colonne des centaines, et X, qui est l'article, dans celle des mille, et posons-les dans l'espace du milieu. Et comme il n'y a aucun caractère pour ce nombre X, pour que vous n'ignoriez pas comment vous devez l'exprimer, posez le nombre qui, seul dans la colonne des dizaines, fait X; savoir, l'unité. Et vous ferez de même partout où il faudra poser un multiple de X. Et pour que vous sachiez comment on place les autres articles, posez toujours deux pour XX; trois pour XXX; quatre pour XL; cinq pour L; six pour LX; sept pour LXX, huit pour LXXX; neuf pour XC. Mais, pour nous renfermer dans notre sujet, revenons à la multiplication annoncée. Ces nombres VIII et dix étant ainsi posés, il reste à multiplier quatre qui est dans la colonne des mille par trois qui est dans la colonne des unités; ainsi, trois fois IIII, XII. La règle énoncée ci-dessus reste la même; posons donc ces nombres dans l'espace du milieu, en observant cette règle, c'est-à-dire posons deux dans la colonne des mille et dix dans celle de dix-mille; il nous reste à multiplier les deux multiplicandes par deux : deux fois VI, XII. Voici la règle : quand un nombre de la colonne des dizaines multiplie un nombre d'une autre colonne quelconque, placez le digit dans la 2e colonne à partir de celle-ci, et l'arti-

---

[1] On trouvera à la fin de ce Traité les calculs figurés dans des tableaux à colonnes, des différentes opérations décrites dans le texte. *Voir*, pour la multiplication actuelle, le tableau A.

cle dans la colonne suivante. Ayant donc posé les deux nombres selon cette règle, il reste à multiplier quatre de la colonne des mille par deux de la colonne des dizaines. Deux fois quatre VIII, la règle est la même. Qu'on pose donc VIII dans la 2e colonne à partir de celle des mille, et l'on n'aura plus rien à multiplier.

Mais il nous reste à purger les colonnes du grand nombre de caractères qui s'y trouvent, et à exprimer enfin le nombre qui provient de la multiplication.

VII. — *Règle de l'addition; application aux produits partiels de la multiplication précédente.*

On purge une colonne quand, au lieu de plusieurs caractères, on en met un seul qui exprime la somme des nombres que marquent ces caractères. On place un seul caractère pour plusieurs, tantôt dans la même colonne, tantôt dans une autre: dans la même colonne, quand la somme des caractères n'excède pas un digit; dans une autre colonne, quand cette somme produit un article seul, comme X ou XX, ou un autre quelconque; et alors cet article se place dans la colonne voisine. Mais si cette somme s'exprime par un digit et un article, le digit reste dans la même colonne, et l'article passe dans la suivante; de sorte qu'alors plusieurs caractères se remplacent par plusieurs. Nous devons toujours commencer cette opération, dans la multiplication comme dans la division, par les colonnes inférieures (de droite), en marchant vers les colonnes supérieures (de gauche).

En suivant cet ordre, purgeons les colonnes. Dans la colonne des centaines il n'y a rien à purger, puisqu'il ne s'y trouve qu'un caractère qui est huit; passons donc à la colonne des mille, dans laquelle se trouve l'unité et deux fois le caractère deux; à leur place posons cinq. Dans la colonne des dix-mille on trouve huit et deux unités : il en résulte un article, savoir, X; c'est pourquoi, après avoir enlevé huit et les deux unités, on transporte une unité dans la colonne suivante, d'après cette règle par laquelle nous avons dit qu'on doit transporter l'unité pour dix, deux pour XX, et pour les autres articles les mêmes caractères qu'on pose dans la multiplication pour exprimer les articles. Dans de telles purgations, pour nous exprimer d'une manière générale, toutes les fois qu'il faudra poser des articles, on suivra l'ordre que nous avons dit ci-dessus, savoir, pour X, on posera l'unité dans l'autre colonne; pour XX, deux, et ainsi des autres.

Après cette opération nous avons l'unité dans la colonne des dix-mille; cinq dans celle des mille; huit dans celle des centaines. On peut donc dire avec sûreté que si IIII mille six cents sont multipliés par XXIII, le produit est cent cinq mille huit cents.

VIII. — *Règles pour la multiplication par un nombre de la colonne des centaines, ou des mille, etc. — Règle générale.*

Nous avons ci-dessus les règles de la multiplication par des unités et par des dizaines; voici celle des centaines: quand des centaines multiplient un nombre d'une colonne quelconque, placez le digit dans la troisième colonne à partir de celle-là, et l'article dans la colonne ultérieure. Pour des mille, placez le digit dans la quatrième colonne; pour des dix-mille, dans la cinquième colonne; et, en un mot, autant la colonne qui multiplie est éloignée de celle des unités, autant le digit sera éloigné de la colonne du multiplicande; et l'article sera toujours placé dans la colonne ultérieure.

IX. — *De la division. Deux méthodes:* 1° *Sans différences;* 2° *Avec différences. — Règle de la division sans différences.*

Jusqu'ici il a été question de la multiplication: parlons maintenant de la division.

La division se fait *sans différences* ou *avec différences*. La division *sans différences* est celle où l'on ne pose aucune *différence* au-dessus des diviseurs. La division *avec différences* est celle où l'on pose des *différences* sur les diviseurs: une sur un, et plusieurs sur plusieurs, comme nous le dirons dans la suite.

Parlons d'abord de la division *sans différences*. Elle est *simple* ou *composée*. Simple, quand il n'y a qu'un diviseur, soit qu'il y ait un seul ou plusieurs dividendes. On donne aussi pour cette opération beaucoup de règles diverses, comme nous le dirons plus loin. Posons auparavant une règle générale pour tous les diviseurs: à quelque colonne qu'appartienne le diviseur, s'il est plus petit que le dividende, ou s'il lui est égal, il se place au-dessus de lui; sinon, à un rang après lui. Cette règle doit être observée dans toutes les divisions. Maintenant parlons des règles différentes; mais auparavant faisons une division simple.

X. — *Exemple de la division simple sans différence. Diviser* 30 *par* 2 [1]. — *Règle de la soustraction.*

Plaçons donc le diviseur deux dans la colonne des unités, et le dividende trois dans celle des dizaines. Cela fait, d'après la règle ci-dessus, placez le diviseur sur le dividende, savoir : deux sur trois, et dites : combien de fois

---

[1] *Voir* le tableau B.

deux est-il dans trois? Une fois, et il reste un. Une fois forme la dénomination, et, pour cette dénomination, placez une unité dans la partie inférieure de l'Abacus, sous ce diviseur lui-même, suivant la règle qui dit : quand le diviseur appartient à la colonne des unités, dans quelque colonne qu'on l'aura transporté, on placera sous lui, dans cette colonne, la dénomination. Quant à l'unité qui forme le reste, on la place sous ce même diviseur, au milieu du champ de l'Abacus, d'après cette règle : si d'un digit il reste un digit, il ne change pas de colonne, il conserve la même ; si d'un article il reste un article, il ne change pas de colonne ; si d'un article il reste un digit et un article, l'article ne change pas de colonne, le digit en change. Mais jamais il n'arrivera dans la division simple, que d'un article il reste un article et un digit [1]; cela ne peut avoir lieu que dans la division composée.

La dénomination étant posée dans la partie inférieure, et l'unité restante, dans la partie du milieu, comme il a été dit, on doit maintenant placer le diviseur, c'est-à-dire deux, parce qu'il est plus grand que le dividende, dans la colonne antérieure. Cela fait, on demande derechef combien de fois le diviseur, c'est-à-dire deux, est compris dans le dividende, c'est-à-dire dans dix ; et on répond : cinq fois, sans reste. Qu'on place cinq comme dénomination, d'après la règle ci-dessus énoncée ; et alors nous avons pour dénominations l'unité dans la colonne des dizaines et cinq dans celle des unités ; et il ne reste rien à diviser. Nons pouvons donc dire que, si on divise XXX par deux, chaque part sera quinze, et il ne restera rien. Ce résultat peut se prouver par la multiplication.

XI. — *Règle générale pour le placement de la dénomination, ou quotient, dans la division simple.*

Jusqu'ici il a été question de la division simple ; et comme la Règle pour le placement de la dénomination dans le cas d'un diviseur de l'ordre des unités est claire, disons quelques mots des autres règles relatives aux autres diviseurs. Pour un diviseur de l'ordre des dizaines, en quelque lieu qu'on l'ait transporté, on place la dénomination à un rang après lui ; pour un diviseur de l'ordre des centaines, on la recule de deux rangs ; pour un diviseur de l'ordre des mille, de trois rangs ; et pour nous exprimer plus clairement : à quelque rang que se trouve un diviseur au delà de la colonne des unités, on

---

[1] Dans chaque opération partielle de la division simple, on divise un nombre d'un seul chiffre, digit ou article, par un simple digit ; conséquemment le reste ne peut être qu'un digit.

place la dénomination à un pareil rang après lui, en quelque lieu qu'on l'ait transporté.

XII. — *De la division composée, continue ou avec intermission.*

Cela étant dit, il nous reste à parler de la division composée.

La division est composée quand il y a plusieurs diviseurs, quel que soit le nombre des dividendes. Si le plus grand diviseur est moindre (que le plus grand dividende) ou s'il lui est égal, on le placera dessus. S'il est plus grand, on le placera à un rang inférieur, comme il a été dit précédemment. On fera cette question : combien de fois le diviseur est-il contenu dans le dividende? et, après avoir placé la dénomination, suivant la règle dite ci-dessus pour le placement des dénominations, on retranchera des dividendes les diviseurs inférieurs multipliés par la dénomination; on placera les restes comme nous l'avons dit, au sujet de la règle des digits et des articles. Car, dans cette division, il y a souvent des digits et des articles; on les place toujours dans la partie du milieu, comme étant des dividendes. On suivra cette marche jusqu'à ce que les diviseurs soient revenus à leur propre place. Cela ayant lieu, si le nombre à diviser est plus grand que les diviseurs, ou leur est égal, on continuera de diviser jusqu'à ce que les diviseurs soient plus grands que les dividendes.

Après cette courte exposition, il faut ajouter que la division composée est *continue* ou *avec intermission.* Elle est *continue* quand les diviseurs se succèdent continûment, de quelque manière que soient placés les dividendes. La division est *avec intermission* quand les diviseurs sont placés avec intermission d'une ou de plusieurs colonnes, quelles que soient celles des dividendes.

XIII. — *Exemple de la division composée, avec intermission. Diviser* 100 000 *par* 20 023 [1].

Pour que ce que nous disons devienne plus clair, posons une division avec intermission. Posons pour diviseurs trois dans la colonne des unités, deux dans celle des dizaines, un autre deux dans celle des dix-mille, en laissant deux colonnes vides, savoir, celle des centaines et celle des mille. Les diviseurs étant ainsi placés, posons l'unité, qui est le dividende, dans la colonne des cent-mille, de sorte qu'on a à diviser cent mille par XX mille XX trois. Maintenant, comme deux est plus grand que l'unité, on le place à

---

[1] *Voir* le tableau C.

un rang inférieur, suivant la règle dite ci-dessus. Il reste à voir combien de fois deux est contenu dans X. Nous pourrions dire cinq fois; mais comme il ne resterait pas de quoi prendre par les diviseurs inférieurs, nous dirons quatre fois, et il reste II. Et comme ces deux restent d'un article, et qu'ils sont un digit, nous les déplacerons, et nous poserons la dénomination au cinquième rang (à partir du diviseur), ainsi que le prescrit la règle. Cela étant fait, disons : quatre fois deux font VIII [1]; nous pourrions aussitôt enlever ces VIII des XX mille; car une colonne quelconque supérieure de quatre rangs à une autre, exprime des mille par rapport à celle-ci, et en posant les restes, nous continuerions bien la division jusqu'à la fin. Mais opérons plus brièvement : posons un neuf dans chaque colonne vide, et ôtant une unité de ce deux qui forme le reste ci-dessus, posons-la sur le dernier neuf [2]. Et alors ôtons de dix ce VIII, qui provient de la multiplication de deux [3] par la dénomination, il restera II : on les placera dans la colonne voisine, et on enlèvera l'unité placée sur le dernier neuf. Maintenant il nous reste à multiplier trois par la dénomination, c'est-à-dire par IIII. Quatre fois trois, XII. Il faut ôter ces XII de XX, car XX est le nombre le plus voisin, et on sait qu'il faut ôter un nombre de celui qui lui est le plus voisin, ou bien de celui qui est posé dessus, si celui-ci est plus grand. Disons donc : si l'on ôte XII de XX, combien restera-t-il ? VIII, et on les déplace. Alors la division est faite plus brièvement au moyen des neuf posés dans les colonnes vides, et de l'unité placée sur le dernier neuf. Et aussi souvent qu'il y aura lieu, opérez de la manière suivante : enlevez une unité du nombre duquel il faut soustraire le diviseur inférieur [4], quel que soit ce nombre; lors même qu'il se réduit à une seule unité, enlevez-la; et, après avoir placé des neuf dans les colonnes vides, placez cette unité sur le dernier [5]. Et souvenez-vous que, dans cette division

---

[1] Il s'agit du *deux* qui exprime des dizaines dans le diviseur 20 023. L'auteur commence ici la multiplication par la gauche.

[2] L'auteur veut retrancher de 20 000 le produit de 23, diviseurs inférieurs, par le quotient 4. Il dit d'écrire 20 000 de cette manière 19 $\overset{1}{9}$00.

[3] Il s'agit toujours du 2 qui exprime des dizaines dans le diviseur 20 023.

[4] L'auteur veut dire *le produit du diviseur inférieur* par la dénomination. Par diviseur *inférieur,* il entend ici le diviseur qui vient immédiatement après les colonnes vides. Ainsi, dans le nombre 20 023 dont il s'agit, 20 est le diviseur inférieur dont parle l'auteur.

[5] C'est la règle générale pour soustraire d'un nombre exprimé par un caractère suivi de plusieurs colonnes vides, un autre nombre : on diminue le premier nombre d'une unité de son ordre, et l'on remplit les colonnes vides jusqu'au nombre à soustraire, par des *neuf,* en

comme dans toutes les autres, il faut soustraire le nombre à soustraire, du nombre supérieur qui en est le plus voisin. Nous avons quatre pour dénomination, et il reste X et IX mille neuf cent huit à diviser. Cette somme est plus petite que les diviseurs : ou voit donc combien de C mille poires, à partager entre XX mille XXIII soldats, il en reviendra à chacun; ce nombre sera IIII avec le reste marqué ci-dessus. Et l'on pourra prouver par la multiplication qu'il en est ainsi.

Après cela, il nous reste à parler de la division avec différences.

XIV. — *De la division* par les différences. *Règle générale de la division simple.*

La division *avec différences* est simple ou composée : simple quand il y a un seul diviseur; composée quand il y a plusieurs diviseurs, soit qu'il n'y ait qu'un dividende ou qu'il y en ait plusieurs.

La division simple se fait de cette manière : Un nombre quelconque est placé comme diviseur dans une colonne quelconque; au-dessus de ce diviseur, on place une différence telle que la somme du diviseur et de cette différence soit égale à dix. On pose un nombre quelconque pour dividende. Le diviseur ne prend pas une partie du dividende pour former la dénomination, mais il le prend tout entier comme dénomination, et l'on multiplie la différence par cette dénomination même. Les nombres provenant de là sont placés comme le prescrit la règle de la multiplication; et chaque fois qu'il en résulte un article, cet article retourne à la première dénomination, et il sert de nouveau multiplicateur. Et chaque fois que de la multiplication il résulte un digit, ce digit est placé dans la colonne inférieure d'un rang à la dénomination.

Il faut observer que dans ces sortes de divisions, je veux dire dans les divisions avec différences, les diviseurs sont toujours des digits, et les dividendes des articles [1]; et quand les dividendes sont ramenés sous les diviseurs, la division change de mode: de *fer* elle devient d'*or,* c'est-à-dire qu'on

---

écrivant au-dessus du dernier une unité. Ainsi dans l'opération dont il s'agit, on a à soustraire 80 de 20 000; on écrit ce dernier nombre de cette manière $19\,\overset{100}{900}$, savoir : 19000, 900 et 100; et on soustrait 80 de la centaine.

[1] Ici l'auteur veut simplement opposer le mot *article* au mot *digit,* et exprimer par là que le dividende doit toujours être un article par rapport au diviseur considéré comme un digit, c'est-à-dire que le dividende est toujours d'un ordre plus élevé que le diviseur. Car celui-ci n'est pas nécessairement un simple digit, il peut être un article d'un ordre quelconque.

passe de la division par les différences à la division sans différences [1].

XV. — *Exemple de la division simple par les différences. Diviser* 900 *par* 8 [2].

Donnons un exemple de la division simple par les différences.

Posons VIII pour diviseur dans la colonne des unités, et au-dessus de lui sa différence à X, c'est-à-dire deux. Posons neuf pour dividende dans la colonne des centaines; et alors il faut dire : Si un diviseur simple, avec sa différence, est dans la colonne des unités, on descendra d'un rang la dénomination prise intégralement. Telle est la première règle. Prenez la dénomination, c'est-à-dire le dividende lui-même tout entier; mais pour que dans la suite vous n'ignoriez pas les autres règles, sachez que, de même que quand le diviseur est dans la première colonne, on descend la dénomination d'un rang, pareillement quand le diviseur est dans la deuxième colonne, on la descend de deux rangs; dans la troisième colonne, de trois rangs, etc. D'après cette règle, prenez la dénomination, c'est-à-dire le dividende tout entier pour dénomination, et posez-la dans la deuxième colonne [3], c'est-à-dire, posez neuf dans la colonne des dizaines, dans la partie inférieure. Multipliez la différence par la dénomination, et dites cette règle : Quand le multiplicateur est un nombre des dizaines, on pose le digit dans la deuxième colonne à partir du multiplicande, et l'article à un rang au delà. Posez donc VIII dans la colonne des dizaines et l'unité dans celle des centaines, et vous aurez ainsi le produit de la multiplication, savoir, un digit et un article. Reportez l'article sur la première dénomination, suivant la règle qui dit : S'il provient un article, il retourne à la dénomination. Multipliez la différence, c'est-à-dire deux, par cet article, c'est-à-dire l'unité : une fois deux fait II. Maintenant dites la règle du multiplicateur de l'ordre des dizaines, et posez le produit, savoir, deux dans la colonne des dizaines. On a ainsi dans la colonne des dizaines, VIII et II, qui font X. Après avoir enlevé VIIII, on place une unité dans la colonne des centaines, puis on la reporte au-dessus des autres dénominations, d'après la règle de

---

[1] Plusieurs auteurs appellent la division sans différences *règle d'or, divisio aurea,* et la division par les différences, *règle de fer, divisio ferrea*. Bernelinus, qui ne se sert pas de ces expressions, appelle la première méthode *domina,* et la seconde *famula*. Adelard avait imaginé un troisième procédé mixte, qu'il appelle *règle d'or et de fer*.

[2] *Voir* le tableau D.

[3] Dans la deuxième colonne à partir du dividende, c'est-à-dire à un rang après le dividende, vers la droite : dans la colonne des dizaines, puisque le dividende est dans la colonne des centaines.

l'article. On multiplie la différence, c'est-à-dire deux, par cette unité : une fois deux fait II. D'après la règle pour un multiplicateur de l'ordre des dizaines, il faut placer ce produit deux dans la colonne des dizaines; et comme c'est un digit, on le posera comme dénomination à un rang après les dénominations déjà calculées. Maintenant il faut dire : Deux fois II, quatre; et suivant la règle d'un multiplicateur de la colonne des unités, on pose ce IIII lui-même dans la colonne des unités, et après qu'on a enlevé la différence qui gouvernait ce diviseur VIII, il est manifeste que le diviseur, qui est plus grand, ne peut rien prendre dans quatre en nombres entiers. La division est donc terminée. Il faut actuellement, suivant la règle de purgation, reporter dans la colonne des centaines une des unités qui sont dans la colonne des dizaines, en y en laissant une et en enlevant IX [1]. On a de la sorte deux unités, l'une dans la colonne des centaines, l'autre dans la colonne des dizaines, et le digit deux dans la colonne des unités. Et l'on voit clairement que neuf cents poires devant être partagées entre huit militaires, chacun en aura cent douze, et il en restera quatre en commun. On pourra vérifier par la multiplication si cela est exact. Et il faut observer que cette multiplication ne se fait pas en multipliant la différence, mais le nombre qui était placé sous la différence, c'est-à-dire VIII. Et ainsi des autres.

XVI. — *De la division composée,* par les différences, *continue ou avec intermission. — Exemple de la division continue : diviser* 7800 *par* 166 [2].

Il nous reste à parler de la division composée, *par les différences.*

La division composée est *continue* ou *avec intermission :* continue, quand les diviseurs se suivent continûment; avec intermission, quand une colonne, ou deux, ou plusieurs, restent vides entre les diviseurs, dans quelque ordre que soient les dividendes. Pour que cela soit plus clair, donnons un exemple de division continue, et ensuite de division avec intermission.

Soient posés les diviseurs suivants : VI dans la colonne des unités, VI encore dans la colonne des dizaines, et l'unité dans celle des centaines (*a*) [3]. La règle pour poser les différences au-dessus des diviseurs est ainsi : au-dessus du dernier diviseur, on pose la différence entière, savoir, quatre au-

---

[1] On a trouvé pour dénominations, 9, 1 et 1 dans la colonne des dizaines et 2 dans celle des unités. C'est la somme de ces nombres que l'auteur fait.

[2] *Voir* le tableau E.

[3] J'indique par les lettres *a*, *b*, *c*,..., les parties ou les rangées du tableau E qui présente l'ensemble des détails de l'opération.

dessus de six; sur le diviseur du milieu, on pose la différence entière moins un, savoir, trois au-dessus de six (*b*); et quel que soit le nombre des diviseurs intermédiaires, toujours on placera au-dessus d'eux les différences entières moins un; mais le plus grand diviseur n'a jamais de différence.

Maintenant posons pour dividendes VIII dans la colonne des centaines, VII dans celle des mille (*c*): cela étant fait, la nature de la division exige que le plus grand diviseur, qui est l'unité, prenne la moitié du dividende, c'est-à-dire de VII, et que l'unité qui restera après qu'on aura pris la moitié de VII, c'est-à-dire trois, demeure dans la même colonne, et qu'on place la partie prise, c'est-à-dire III, dans la partie inférieure de la colonne des dizaines, suivant la règle que voici : un diviseur composé, placé au troisième rang avec sa différence, enverra au troisième rang à partir du dividende, la partie prise comme dénomination, si cette partie est prise comme d'un digit, et au quatrième rang, si elle est prise comme d'un article. Et pour que vous n'hésitiez point sur la manière de poser les dénominations, sachez que, de même que le diviseur placé au troisième rang envoie la dénomination au troisième rang, pareillement, placé au deuxième rang, il l'envoie au deuxième rang; placé au quatrième rang, il l'envoie au quatrième rang, et ainsi de suite; la partie, quand elle est prise dans un article, étant toujours descendue d'un rang.

Pour que vous compreniez quelle partie du dividende le plus grand diviseur doit prendre, sachez que si le plus grand diviseur est l'unité, il prend la moitié; s'il est deux, il prend le tiers; trois, le quart; quatre, le cinquième; de sorte que, la dénomination du diviseur [1] croissant, la partie prise diminue toujours. D'où il résulte que, si le diviseur est l'unité, il prend la moitié; s'il est deux, le tiers; et ainsi de suite. Nous dirons plus loin pourquoi, dans la division simple par la différence, on prend le plus grand dividende entier pour former la dénomination. Faisons d'abord la division annoncée.

Les nombres convenus étant posés, disons : Quelle est la moitié de sept? III, et il reste I. Cela dit, posons cette moitié, c'est-à-dire III, dans la partie inférieure de la colonne des dizaines (*d*), en laissant une unité pour dividende dans celle des mille (*e*); et alors il faut multiplier par cette partie, c'est-à-dire par trois, les différences des diviseurs : trois fois IIII, XII; et,

---

[1] Ici *dénomination* du diviseur veut dire la valeur absolue du digit qui exprime le diviseur. Ainsi, quand le diviseur est 300, 3 est sa dénomination; s'il est 4000, 4 est sa dénomination.

d'après la règle de la multiplication par des dizaines, on pose deux dans la colonne des dizaines, et l'unité dans celle des centaines (*f*); et ensuite nous disons: Trois fois trois, IX, que nous posons dans la colonne des centaines (*g*), suivant la règle. Nous avons donc deux dans la colonne des dizaines, neuf et huit et l'unité dans celle des centaines, et l'unité dans celle des mille. Maintenant enlevons le neuf, laissons le huit, et transportons l'unité dans la colonne des mille (*h*); et alors on dit: Quelle est la moitié de deux? L'unité. Après avoir posé cette unité sur la partie précédente (*i*), c'est à-dire sur trois, et avoir enlevé l'autre unité de la colonne des mille [1], multiplions les différences du diviseur par l'unité placée sur le trois. Cela fait, et les produits étant posés suivant la règle de la multiplication (*j*), vous avez IIII et II dans la colonne des dizaines, VIII et III dans celle des centaines. Purgeant les colonnes, on a VI dans la colonne des dizaines, l'unité dans celle des centaines, et l'unité dans celle des mille (*k*). Maintenant, comme on ne peut pas prendre la moitié de l'unité en nombres entiers, et qu'il n'y a point d'autre digit exprimé par l'unité, nous devons prendre la moitié de X. Et notez que chaque fois que vous pourrez prendre la partie cherchée en considérant le dividende comme un digit, jamais vous ne la prendrez en le considérant comme un article. Mais, si vous ne pouvez la prendre d'un digit, prenez-la d'un article [2]. Quand on prend la partie dans un article, on la place à un rang après celui qu'elle aurait si on l'eût prise dans un digit, suivant la règle donnée précédemment. Disons donc: Quelle est la moitié de dix? V. Ayant donc posé cinq dans la colonne des unités (*l*), suivant la règle, multipliez les différences des diviseurs par V. Cela fait (*m* et *n*), et les colonnes étant purgées, il reste deux trois, l'un dans la colonne des dizaines et l'autre dans celle des centaines (*o*); et alors nous dirons: Quelle est la moitié de III? L'unité, et il reste un. Retenant une seule unité dans la colonne des centaines (*p*), on en pose une autre au-dessus du cinq (*q*), suivant la règle précédente, on multiplie par cette unité les différences des diviseurs, et on pose les sommes du produit au milieu du tableau (*r*); on purge les colonnes, et alors il reste quatre dans la colonne des unités, six dans celle des dizaines, l'unité dans celle des centaines (*s*), et l'on n'a plus

---

[1] On a deux unités pour dividende dans la colonne des mille; on divise par 2; la dénomination ou quotient est 1, sans reste. L'auteur exprime cette opération, en disant: on prend l'une des deux unités pour la dénomination, et on supprime l'autre.

[2] Je passe ici une phrase sur laquelle je reviendrai plus tard.

de division à faire ; ce qu'on voit en enlevant les différences des diviseurs. Donc de VII mille huit cents poires à partager entre CLXVI soldats, XLVI reviennent à chacun (*t*), et il reste CLXIIII en commun (*s*), ce qui peut se prouver par la multiplication.

C'est ainsi que se fait la division continue par les différences.

XVII. — *Exemple de la division avec intermission* par les différences. *Diviser* 8 000 *par* 606 [1].

Parlons maintenant de la division avec intermission *par les différences*, et posons cet exemple : Plaçons pour diviseurs deux six, l'un dans la colonne des unités, et l'autre dans celle des centaines (*a*); sur l'inférieur, posons la différence entière (*b*); sur le plus grand, aucune différence : et soit placé huit pour dividende (*c*) [2], et disons : quelle est la septième partie de huit ? L'unité, et l'on pose l'unité dans la colonne des dizaines comme dénomination (*d*); l'unité restante n'est pas déplacée ; elle demeure dans la même colonne (*e*), suivant la règle qui dit : ce qui reste d'un digit demeure ; mais ce qui reste d'un article change de colonne, à moins que ce ne soit un article, parce qu'alors l'article demeure. Cela fait, il faut multiplier la différence par cette partie, c'est-à-dire par l'unité : une fois quatre fait quatre. Et après avoir posé ce digit, c'est-à-dire IIII, dans la colonne des dizaines (*f*), suivant la règle de la multiplication, il nous reste à placer dans la partie supérieure de la colonne des dizaines, neuf, comme multiplicande (*g*), et à dire : une fois IX, neuf : et, posant IX dans la colonne des centaines (*h*), suivant la règle, nous avons IIII dans la colonne des dizaines, IX dans celle des centaines, et l'unité dans celle des mille, au milieu du tableau (*i*). Et il faut remarquer que, de même que ce neuf est placé comme multiplicande dans la colonne des dizaines, pareillement on placerait plusieurs neuf comme multiplicandes, s'il y avait plusieurs colonnes vides. On enlève toujours ces neuf avec les différences ; cela distingue la division continue de la division avec intermission. Maintenant, comme l'unité n'a pas de septième partie, on cherchera la septième partie de dix ; et on répondra, l'unité : et on la placera à un rang inférieur, comme si on l'avait prise d'un digit (*j*), et trois qui reste de X sera transporté (*k*), suivant la règle. Et maintenant on multipliera la différence et neuf par la partie placée, c'est-à-dire par l'unité. Plaçant les nom-

---

[1] *Voir* le tableau F.

[2] L'auteur, ou du moins le texte, ne dit pas dans quelle colonne on doit placer ce dividende ; mais la suite de l'opération fait voir que c'est dans la colonne des mille.

bres du produit dans la partie libre de l'Abacus (l), suivant la règle, nous avons IIII dans la colonne des unités, IX et IIII dans celle des dizaines, neuf et trois dans celle des mille. Purgeant les colonnes, on a quatre dans la colonne des unités, trois dans celle des dizaines, un autre trois dans celle des centaines, et l'unité dans celle des mille (m). Et alors on demandera quelle est la septième partie de dix, on répondra l'unité (n), et il reste III (o). Ayant placé l'unité et transporté trois, et multiplié la différence et neuf par l'unité (p) et purgé les colonnes, nous avons VIII dans la colonne des unités, deux dans celle des dizaines, sept dans celle des centaines (q). Enlevant la différence et le neuf qui n'a été posé dans la colonne des dizaines que pour la multiplication, nous arrivons à la division d'or; car la somme à diviser est plus grande que les diviseurs. La suite est assez claire.

XVIII. — *Remarque sur la division par un nombre qui contient des* neuf, *tel que* 1994.

Il faut observer que si vous avez posé dans la colonne inférieure un nombre avec sa différence entière, et dans la colonne des mille l'unité, et dans les colonnes intermédiaires des neuf; si, dis-je, vous avez posé ces nombres comme diviseurs, vous diviserez, par la méthode précédente, tel nombre que vous voudrez, si ce n'est que pour reformer un dividende, jamais vous ne multiplierez les neuf placés l'un dans la colonne des dizaines, l'autre dans celle des centaines. C'est là la seule différence.

XIX. — *Pourquoi dans la division simple on prend le dividende entier, et dans la division composée une partie du dividende.*

Il nous reste à dire pourquoi dans la division simple, par la différence, on prend le tout pour dénomination; et ensuite pourquoi dans la division composée, par la différence, l'unité prend la moitié, deux le tiers, trois le quart et ainsi de suite.

Dans la division simple, par la différence, le diviseur avec la différence fait X; et dans la division sans différence, jamais on ne pose X comme diviseur; mais chaque fois que dans quelque colonne les caractères font X, on en retranche neuf, et on transporte l'unité; et de même que, suivant la loi de cette division par la différence, on prend une fois le plus grand dividende entier pour former la dénomination, semblablement on prend le même dividende ou entier, ou par partie, d'après la règle de la division sans différence, pour former la dénomination, ce qui sera assez clair pour un calculateur intelligent.

Mais dans la division composée, par la différence, comme on pose le

diviseur inférieur avec sa différence entière, et que les diviseurs du milieu ont leurs différences entières moins un, et que le plus grand n'en a aucune, l'unité passe du diviseur inférieur au supérieur, au moyen des diviseurs intermédiaires, non effectivement, mais par la pensée. C'est pourquoi si cette unité jointe au plus grand diviseur devient la moitié de cette somme, on cherche quelle est la moitié du dividende, et la dénomination se place comme il a été dit; si l'unité transportée devient le tiers de la somme, on cherche quel est le tiers du dividende; si elle est le quart, on cherche quel est le quart; si elle est le cinquième, on prend le cinquième; et ainsi de suite.

Comme je crois que ce qui a été dit de la division en nombres entiers suffit, maintenant parlons des divisions par les fractions. Fin des règles de l'Abacus [1].

TABLEAUX DES OPÉRATIONS.

A. *Multiplier* 4600 *par* 23.

CM	XM	M	C	X	I	
		4	6			Multiplicandes.
		1	8			Produit de 600 par 3.
	1	2				Produit de 4000 par 3.
	1	2				Produit de 600 par 20.
	8					Produit de 4000 par 20.
1		5	8			Produit total.
				2	3	Multiplicateurs.

[1] Quoique le texte se termine par les mots *finite regule Abaci*, le traité n'est pas terminé, il y manque la partie des fractions annoncée dans la dernière phrase de l'auteur. Le calcul des fractions n'offre pas un aussi puissant intérêt historique que celui des nombres entiers, parce que c'est dans celui-ci qu'on trouve les principes du système de numération, et l'origine de notre arithmétique vulgaire. Toutefois ce calcul des fractions, qui diffère complétement du calcul actuel, mais qui ressemble à notre théorie des nombres complexes, mérite aussi d'être tiré de l'oubli, comme complétant un traité d'arithmétique des Anciens. Je le ferai connaître dans mon *Histoire de l'Arithmétique*.

C. *Diviser* 100 000 *par* 20 023.

CM	XM	M	C	X	I	
	2			2	3	Diviseurs.
	2				.	Plus grand diviseur placé à la droite du dividende.
1						Dividende.
	2					Reste.
			1			
	1	9	9			Autre expression du reste.
				8		Produit du diviseur 20 par la dénomination 4.
	1	9	9	2		Reste.
				1	2	Produit du diviseur 3 par la dénomination 4.
	1	9	9		8	Reste de la division.
					4	Dénomination.

D. *Diviser* 900 *par* 8.

C	X	I	
		2	Différence.
		8	Diviseur.
9			Dividende.
1	8		Produit de la différence 2 par la dénomination 9.
	2		Produit de la différence 2 par la dénomination 1.
1			Somme des deux digits 8 et 2 provenus des multiplications.
	2		Produit de la différence 2 par la 3e dénomination 1.
		4	Produit de la différence 2 par la 4e dénomination 2. Reste de la division.
	1		Dénominations.
	1		
	9	2	
1	1	2	Somme des dénominations. Quotient total.

B. *Diviser* 30 *par* 2.

X	I	
	2	Diviseur.
~~2~~	~~2~~	Diviseur transporté.
3		Dividende.
1		Reste ; nouveau dividende.
1	5	Dénominations.

E. *Diviser* 7800 *par* 166.

M	C	X	I		
		3	4	*b.*	Différences.
	1	6	6	*a.*	Diviseurs.
~~7~~	8			*c.*	Dividendes.
1				*e.*	Reste du plus grand dividende.
	1	2		*f.*	Produit de la différence 4 par la dénomination 3.
	9			*g.*	Produit de la différence 3 par la dénomination 3.
~~2~~	8	2		*h.*	Nouveau dividende.
	3	4		*j.*	Produit des différences par la dénomination 1.
~~1~~	1	6		*k.*	Nouveaux dividendes.
		2		*m.*	Produit de la différence 4 par la dénomination 5.
	1	5		*n.*	Produit de la différence 3 par la même dénomination.
	~~3~~	~~3~~		*o.*	Nouveaux dividendes.
	1			*q.*	Reste du plus grand dividende.
		3	4	*r.*	Produits des différences par la 3[e] dénomination 1.
	1	6	4	*s.*	Nouv. divid. plus petits que les diviseurs. Reste de la divis.
		1	1	*i-p.*	Dénominations.
		3	5	*d-l.*	
		4	6	*t.*	Somme des dénominations. Quotient total.

F. *Diviser* 8000 *par* 606.

M	C	X	I	
		9		*g.* 9 pour tenir lieu de différence.
			4	*b.* Différence.
	6		6	*a.* Diviseurs.
8				*c.* Dividende.
1				*e.* Reste du dividende.
		4		*f.* Produit de la différence 4 par la dénomination 1.
	9			*h.* Produit du 9 placé avec la différence, par la dénomination.
1	9	4		*i.* Nouveaux dividendes.
	3			*k.* Reste du dividende 10.
		9	4	*l.* Produit de la différence 4 et de 9 par la dénomination.
1	3	3	4	*m.* Nouveaux dividendes.
	3			*o.* Reste du dividende 10.
		9	4	*p.* Produit de la différence 4 et de 9 par la dénomination.
	7	2	8	*q.* Nouveaux dividendes.
	6		6	Produit des diviseurs par la dénomination.
	1	2	2	Reste de la division.
			1	
			1	*n.* } Dénominations.
		1	1	*d-j.* }
		1	3	Somme des dénominations. Quotient total.

Regule Abaci (1).

I. Ars ista vocatur abacus : hoc nomen vero arabicum est et sonat mensa, hac affinitate

(1) Ce Traité est tiré d'un Ms. de la Bibliothèque royale, nº 533 du *fonds de Saint-Victor,* lequel paraît avoir été écrit vers l'an 1200. Dans le même manuscrit se trouvent plusieurs autres pièces arithmétiques, la plupart sur l'Abacus ; en voici la Notice : 1º Tractatus Gerlandi de Abaco. Dans ce Traité les opérations sont figurées avec les chiffres mêmes de l'Abacus et dans des *tableaux à colonnes.* L'auteur donne des valeurs de position même aux signes des fractions. 2º Noms et figures des neuf chiffres de l'Abacus et des vingt-cinq fractions romaines. 3º Notule de Arithmetica. Cette pièce roule sur l'arithmétique spéculative et les

rerum quia utrumque de asseribus solet fieri. Ars ista agit de numero, vel multiplicationem et divisionem. Ecce hujus materiam et modum tractandi. Utilitas autem ejus est artificiose et compendiose scire numerare multiplicando et dividendo. Si quis vero quomodo fiat abacus ignorat, his sequentibus auditis certus efficiatur.

II. Disponuntur quædam spacia, XII vel plura lateraliter, quæ spacia arcus nominantur. Et in primo arcu scribitur unitas; in secundo numerus ille qui decuplus est unitatis, scilicet X; et cæteri qui in aliis arcubus scribuntur, unusquisque suo inferiori proximo decuplus invenitur. Et primus quidem arcus, quia unitatem quæ singularis est continet, singularis dicitur; secundus vero, decenus; tertius, centenus; quartus, millenus; et cæteri qui sequuntur similiter ab introscriptis numeris nomen traxerunt. In his arcubus ad multiplicandum vel dividendum præparatis, ponuntur diversi caracteres numero IX, qui ad omnem multiplicationem divisionemque per integros sufficiunt; et illi IX proprie ad singularem arcum pertinent. Et in primo scribitur unitas, in secundo binarius, in tertio trinarius, in quarto quaternarius, in quinto quinarius, in sexto senarius, in septimo septenarius, in octavo octonarius, in nono novenarius. Qui numeri his figuris et nominibus subjectis inscribuntur et nominantur.

Figure karacterum cum nominibus.

Igin	Andras	Ormis	Arbas	Quimas	Calcus	Zenis	Themenias	Celentis
I	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	Λ	8	[illegible]

His ita figuratis et nominibus designatis, dicendum mihi videtur quod, si unum in abacho ponere volueris pones I in singulari arcu; si duo, pones [illegible] in eodem arcu; et sic ceteras summas numeri usque ad X exprimere poteris ponendo ceteros caracteres in eodem arcu. Si vero X volueris habere, pone I in deceno; si XX, pone [illegible] in eodem; et ut breviter dicam, quilibet caracter positus in quolibet arcu summam illius arcus tociens notat, quotiens ille caracter unitatibus insignitur, ut, si caracter unitate inscribitur, in quocumque arcu ponatur, summam illius notat semel; si binario, bis; et sic de cæteris. Cumque ita sit quod caracteres exprimunt quod minus est in arcubus et e converso, scilicet in arcubus contineatur quod minus est in caracteribus, isti IX caracteres, ad omnem multiplicationem divisionemque, convenienter per arcus dispositi, sicut supra diximus, sufficiunt.

III. His breviter dictis, dicendum primo mihi videtur de numero, quia alius digitus, alius articulus.

Digiti sunt omnes usque ad X; decem vero articulus est, et quicumque denario vel pluribus denariis additis numeri surgunt. Ceteri vero, sicut XI, XII, et reliqui usque ad XX,

---

propriétés des nombres. 4° Duo sunt scientie, logica et mathematica... Dissertation sur l'arithmétique, et particulièrement sur les principes du système de l'Abacus. 5° Regule Abaci. C'est le Traité que je publie ici. 6° Dix vers, dont neuf sur les neuf chiffres *igin*, *andras*, etc., et un dixième sur le zéro nommé *sipos*. 7° Regule Abaci. Traité de l'Abacus sans nom d'auteur, mais qui appartient à Adélard, le traducteur des Éléments d'Euclide, ainsi que je l'ai reconnu d'après un manuscrit de la bibliothèque de Leyde, où le même ouvrage se trouve sous le nom d'Adélard.

ex digito et articulo compositi sunt, et, ut breviter dicam, ceteri omnes qui non ex denario vel denariis denario additis consurgunt. Et notandum est quod sicut omnes usque ad decem, digiti ad ipsum X sunt, sic X et ceteri articuli usque ad. . . . . sunt; centum vero et ceteri usque ad mille sunt digiti ad ipsum mille; et sic de qualibet inferiori unitate usque ad proximam superiorem unitatem.

Numeri vero de unitate usque ad X digiti vocantur, eo quod numeri illi per flexuras vel extensiones digitorum notentur.

IV. Verbi gratia, quando unum innuere volumus, flectimus minimum digitum levæ in mediam palmam; quando duo eumdem et medicum; quando III prædictos et medium; quando IIII, medico et medio flexis supradicto modo, minimus erigitur; quando V medicus cum minimo erigitur, solo medio flexo supradicto modo; quando VI medius et minimus eriguntur flexo medico supradicto modo; quando VII minimus ad radicem palmæ flectitur; quando VIII minimus et medicus eodem modo flectuntur; quando IX medius quoque cum supradictis inflectitur. Et quia toti digiti ad hos numeros notandos flectuntur vel eriguntur, ut dictum est, ideo numeri per eos denotati, digiti vocantur. Decem vero et quicumque denario vel denariis additis numeri surgunt, articuli vocantur, eo quod digitorum articulis solent notari sic: si X notare velimus, ungulam pollicis in summo articulo indicis infigimus; si XX, summum articulum indicis super ungulam pollicis ponimus; si XXX, ungulam pollicis atque indicis quasi blando osculo lateraliter copulamus; si XL, sub medio arcu indicis pollicem ponimus ut unguis ultra appareat; si L, pollicem in modum gamma flectimus, indice parum inclinato; si LX, pollicem in modum gamma plicatum indice cingimus; si LXX, summitatem pollicis inter inferiorem partem indicis atque medii exponimus; si LXXX, ungulam pollicis in medio arcu indicis figimus; si XC, summitatem indicis ad radicem pollicis inflectimus. Si C, a sinistra in dextram transimus, et quod est in sinistra X, est C in dextra; quod autem est XX in sinistra, sunt CC in dextra; quod est XXX in sinistra, sunt CCC in dextra; quod est XL in sinistra, sunt CCCC in dextra; quod est L in sinistra, sunt D in dextra; quod LX in sinistra, sunt DC in dextra; quod est LXX in sinistra, sunt DCC in dextra; quod est LXXX in sinistra, sunt DCCC in dextra; quod est XC in sinistra, sunt DCCCC in dextra; quod est C in sinistra, est $\overline{\text{I}}$ in dextra; quod autem est CC in sinistra, est duo millia in dextra; et, ut breviter dicam, eodem modo crescunt millenarii in dextra quo unitates in sinistra. Sed hoc hactenus.

V. Nunc ad multiplicationem divisionemque tractandam redeamus; et prius de multiplicatione dicamus.

Multiplicatio igitur alia simplex, alia composita. Simplex est quando unum est multiplicans, quotquot sint multiplicandi: composita quando plura multiplicant, etsi multiplicandum sit unum. Multiplicatio composita alia continua, alia intermissa. Continua est quando multiplicatores continue ponuntur in sedibus suis, veluti si primus in singulari, secundus ponatur in deceno, et tertius in centeno, quartus in milleno, si tot fuerint; si etiam plures ita disponantur quod nullus arcus intermittatur. Intermissa multiplicatio est quando positis multiplicatoribus, unus arcus vel plures intermittuntur. Sed quia nulla major difficultas est in composita quam in simplici, aut intermissa quam in continua, redeuntes ad ipsum totum, ad multiplicationem scilicet, diversitatem regularum illius, a singulari arcu incipientes ostendamus, aliquos multiplicatores summamque multiplicandam ponentes.

VI. Ponamus igitur trinarium in singulari et binarium in deceno, multiplicatores, et senarium in centeno, et quaternarium in milleno, multiplicandos; ita quod multiplicatores in inferioribus sedibus, multiplicandi in superioribus, summa quæ inde excrescet in mediis campis ponatur; et positis multiplicatoribus et multiplicandis, incipientes a singulari, dicamus : Ter sex, XVIII sunt; regula hæc est : singularis arcus quemcumque multiplicat, in eodem pone digitum, in ulteriore articulum; ponamus igitur VIII qui digitus est in centeno, et X qui articulus est in milleno in mediis campis, et quia nullus caracter X scilicet isto numero inscribitur, ne dubites quod pro eo X debeas ponere, pone numerum illum qui solus positus in deceno arcu facit, X scilicet unitatem; et similiter facies ubicumque X arcus erit ponendus. Et ne deinceps de ceteris articulis ponendis dubites, semper pone pro XX binarium, pro XXX trinarium, pro XL quaternarium, pro L quinarium, pro LX senarium, pro LXX septenarium, pro LXXX octonarium, pro XC novenarium. Sed ne noster excursus modum excedat, ad predictam multiplicationem redeamus. His summis scilicet VIII et denario sic positis, restat ut quaternarium qui est in milleno, per ternarium qui est in singulari, multiplicemus sic : ter IIII, XII. Regula supradicta non mutatur. Positis igitur illis summis in mediis campis secundum regulam, scilicet posito binario in milleno, et denario in deceno milleno, restat ut per binarium duos multiplicandos multiplicemus; sic : bis VI, XII. Regula hæc est : Decenus arcus quemcumque multiplicat, in secundo ab eo multiplicato pone digitum, in ulteriore articulum. Positis igitur summulis secundum regulam, restat ut per binarium deceni arcus multiplicetur quaternarius milleni sic : bis quatuor VIII; regula non mutatur. Posito igitur VIII in secundo arcu a milleno, nichil est multiplicandum.

Sed restat ut a multitudine caracterum arcus nostros purgemus, et tunc demum summam multiplicationis colligamus.

VII. Purgare arcus est quando, pro multis caracteribus, unus solus caracter ponitur secundum summulas numerorum qui in eis caracteribus scribuntur. Ponitur autem unus caracter pro multis quandoque in eodem arcu, quandoque in diverso. Unus pro multis in eodem arcu, quando tota summa quæ in multis continetur digitum non excedit; unus pro multis in diverso arcu, quando de summa multorum crescit articulus solus, ut X, vel XX, vel aliquis alius. Et semper ille articulus ponitur in proximo sibi diverso. Si vero ex summa multorum crescit digitus et articulus, digitus manet et articulus transfertur. Et ita ponuntur multi pro multis. Hanc purgationem semper et in multiplicatione et in divisione, ab inferioribus tendendo ad superiora, incipere debemus.

Istum igitur ordinem sequentes purgemus eos; et quia in centeno nichil est purgandum, cum unus solus caracter in eo sit, qui octonario inscribitur, transeamus ad millenum in quo sunt duo binarii et unitas, et pro illis quinarium ponamus. In XM est octonarius et due unitates; unde efficitur articulus, X scilicet, et idcirco illis remotis, scilicet VIII et duabus unitatibus, transfertur unitas, ea ratione qua supra diximus debere transferri unitatem pro denario, binarium pro XX, et cæteris eosdem caracteres qui in multiplicatione pro articulis ponuntur. In talibus purgationibus quoque et, ut generaliter dicatur, quotiescumque articulis ponendis opus fuerit, pones ordine supradicto scilicet ut pro X, ponatur unitas ad alium arcum translata; pro XX, binarius; et cætera. His ita translatis, ecce habemus unitatem in CM; quinarium, in M; octonarium, in C. Potes igitur secure dicere quod si IIII milia et sexcenta per XXIII multiplicentur, surget hæc summa : centum quinque milia et octingenta.

VIII. Ecce habemus regulas singularis et deceni arcus; hæc autem est centeni : Centenus

quemcumque multiplicat; in III^{cio} ab eo pone digitum, in ulteriore articulum. Millenus, in quarto; decies millenus, in quinto, et, ut plane et breviter dicatur, quoto loco quilibet arcus distat a singulari, toto loco removetur digitus ab eo quem multiplicat, et semper in ulteriore ponitur articulus.

IX. Hactenus de multiplicatione; nunc de divisione dicamus.

Divisio alia sine differentiis, alia cum differentiis. Divisio sine differentiis est cum nulla differentia divisoribus supraposita; cum differentiis vero est divisio, cum divisoribus differentia superponitur, una uni vel plures pluribus, ut postea dicetur. Sed prius de divisione sine differentiis dicamus. Quæ, alia simplex, alia composita. Simplex est cum divisor est unus, sive dividendum sit unum, sive multa sint dividenda. Hic quoque multæ diversæ traduntur regulæ, ut postea dicetur; sed prius quamdam omnibus divisoribus generalem ponamus, sic : Divisor cujuscumque sit arcus, si minor vel equalis fuerit summæ dividendæ, susupraponitur, si non, secundatur. Hæc in omni divisione servanda est. Nunc de diversis regulis dicamus quædam; prius aliquam simplicem divisionem faciendam disponamus.

X. Ponamus igitur binarium divisorem in singulari arcu et ternarium dividendum in X. His ita positis, juxta regulam supradictam divisorem dividendo supra appones, scilicet binarium trinario, et dices : quociens est binarius in trinario? Semel, et remanet unus. Semel est denominacio, et pro illa denominacione pones unitatem in inferiori sede abachi sub eodem divisore, juxta regulam quæ dicit : singularis divisor quocumqùe translatus fuerit, sub eodem pone denominacionem. Unitas vero que remanet sub eodem divisore in medio campo ponetur, juxta hanc regulam : si digitus de digito remanet, non mutat locum sed manet; si articulus de articulo, manet; si digitus et articulus de articulo, articulus manet, digitus transfertur. Sed quod digitus et articulus de articulo remaneant, si deinde dividendo processeris, nunquam in simplici divisione reperies, sed tantum in composita. Posita denominacione in inferiori sede et unitate remanente in campo medio, ut dictum est, restat ut divisorem, scilicet binarium, quia major est dividendo, uno arcu inferius ponamus. Quo facto, queritur iterum : Quoties divisor, scilicet binarius, in dividendo sit, scilicet in denario? et respondetur : quinquies, et nihil remanet. Ponatur igitur quinarius ut denominacio, juxta regulam predictam; eaque posita, habemus unitatem in X et quinárium in singulari arcu ut denominaciones, et nichil restat dividendum. Possumus itaque dicere quod, si XXX duobus dividentur, unicuique pertinet XV, et nichil remanet : et hoc potest probari per multiplicationem.

XI. Hactenus de simplici divisione, et quia regula singularis divisoris de ponenda denominacione patet, nunc de ceteris regulis reliquorum divisorum breviter dicamus. Decenus divisor quocumque translatus fuerit, denominacionem secundabit; centenus terciabit; millenus quartabit, et, ut planius dicatur, quoto loco arcus quilibet a singulari discesserit, toto loco retro ponetur denominacio sui divisoris, quocumque translatus fuerit.

XII. His expeditis restat ut de composita divisione dicamus.

Composita divisio est cum plures ponuntur divisores, quotquot sint dividendi, et si maximus divisor minor vel equalis fuerit, supraponitur; si non, secundatur, ut dictum est superius; et facta questione : quotiens divisor in dividendo continetur? et posita denominatione, juxta regulam prædictam ponendarum denominacionum, restat ut minores divisores, per positam denominacionem multiplicati, a dividendis auferantur, positis residuis, ut docuimus, pro ratione articulorum et digitorum. In hac vero divisione sepe remanent digiti et articuli, et semper in mediis campis ponuntur, ut dividendi. Et hic ordo divisionis servabitur quousque

divisores ad proprias sedes referantur. Quibus relatis, si summa dividenda major vel equalis divisoribus fuerit, tunc quoque divide quousque divisores majores sint dividendis.

His breviter dictis, dicendum mihi videtur de composita divisione, quod alia continua, alia intermissa. Continua est, quando divisores continue ponuntur, positis quolibet modo dividendis; intermissa est, quando divisores, intermisso uno arcu vel pluribus, ponuntur, positis ubicumque dividendis.

XIII. Ut autem quod dicitur magis appareat ponamus quamdam intermissam sic : Ponantur igitur divisores in singulari ternarius, in X^{no} binarius, et in $X^{o}.M^{o}$. alius binarius, intermissis duobus arcubus, C^{o} scilicet et M^{o}. Positis itaque divisoribus, ponatur unitas dividenda in CM; et ita centum milia sunt dividenda XX milibus et XX tribus. Modo binarius, quia major est unitate, juxta supradictam regulam, secundatur. Nunc restat quærere quociens est binarius in X. Possemus dicere quinquies; sed quia nichil de summa remaneret quod inferiores divisores possent capere, dicemus quater, et remanent II°; et illa II°, quia remanent de articulo et sunt digitus, transferemus, et denominacionem quintabimus, sicut regula exigit. Hoc facto dicamus : quater duo, VIII sunt, modo possemus VIII auferre a XX milibus; quilibet enim quartus arcus superior cuilibet quarto inferiori millenus est; et positis residuis, bene procederemus ad finem divisionis; sed faciamus compendiosius, et ponamus singulos novenarios in vacuis campis, et dempta unitate ab illo binario qui superius remansit, superponamus eam novenario inferiori, et tunc illud VIII, qui de binario multiplicato per denominacionem supra sumptam excrevit, a denario auferamus, et remanebunt II, et transferentur, et unitas supraposita novenario abicietur. Modo sequitur ut per denominacionem suprapositam, scilicet per IIII, ternarium multiplicemus sic : quater tres, XII : modo restat ut XII a XX auferamus; XX enim propior est ei, et constat quod de propiore sibi debet auferri et etiam de sibi subposito, si subpositus major est eo. Dicamus igitur : si XII auferantur a XX, quot remanerent? VIII, et transferuntur. Ecce facta est divisio compendiosius per novenarios in vacuis campis positos, et per unitatem inferiori novenario superpositam. Et, quotiens opus fuerit, tali ponte sic facito : Deme unitatem summe a qua debes auferre inferiorem divisorem, quecumque sit summa illa, et si sola unitas ibi fuerit, illam solam sume, et positis novenariis in vacuis campis, superpone eam unitatem inferiori novenario. Et memento auferre illud quod aufertur, et in hac divisione et in omnibus aliis, a superiori numero sibi proximo. Ecce habemus quaternarium denominacionem, et X et IX milia et nongenta octo remanent dividenda : quæ summa divisoribus minor est; patet igitur quod de CM piris pertineant XX milibus militibus et XXIII, unicuique IIII pira, supradictis remanentibus. Et quod ita sit multiplicatione probare poteris.

XIV. His expeditis, de divisione cum differentiis [1] restat dicere.

Divisio cum differentiis alia simplex, alia composita. Simplex quando unus solus divisor; composita quando plures divisores ponuntur, sive dividendum unum, sive plura sint. Simplex autem hoc modo fit : Ponitur quilibet numerus divisor in arcu quolibet, et illi divisori posito

---

[1] Il y a *sine* dans le Ms. au lieu de *cum*. Ce mot *sine* a été écrit par une main étrangère qui a rétabli quelques mots illisibles. Car la pièce que je publie ici est, en général, très-difficile à lire, l'encre s'étant altérée et ayant blanchi.

superponitur differentia tantæ quantitatis quod summa divisoris et differentiæ sit denarius; atque ponitur quelibet summa dividenda, et divisor non sumit partem de summa dividenda ad denominacionem, sed ipsum totum ut denominationem sumit, et per ipsam sumptam multiplicatur differentia, et summe quæ inde excrescunt, ponuntur sicut regula multiplicationis exigit; et quociens inde articulus excrescit, redit ad priorem denominationem, et per ipsum iterum multiplicatur; et quoties ex multiplicatione digitus excreverit, uno arcu inferius ipsa denominacione ponetur.

Et notandum quod in talibus divisionibus, scilicet in divisionibus cum differentiis, semper divisores ponuntur in digitis, dividendi vero in articulis; et quotiens dividendi usque sub divisoribus referuntur, mutatur divisio, et de ferrea redit ad auream, scilicet de ista cum differentiis ad illam quæ est sine differentiis.

XV. Gratia autem exempli ponatur quædam simplex divisio cum differenciis, sic :

Ponatur VIII divisor in singulari arcu, et superponatur ei differentia quæ cum eo reddat X, scilicet binarius, et ponatur novenarius dividendus in C arcu, et tunc restat dicere : simplex divisor cum differentia si primatus fuerit, denominacionem sumptam a toto secundabit. Hec est prima regula. Sume denominacionem, hoc est ipsum totum ; et ne deinceps de aliis inveniendis dubites, scias quod, sicut primatus secundabit, sic secundatus terciabit, terciatus quartabit, quartatus quintabit, etc. Data superiori regula, sume denominacionem, hoc est ipsum totum ut denominationem, et pone in secundo arcu, scilicet novenarium pone in deceno arcu in inferiori sede; multiplicata differentia per denominacionem, dices hanc regulam : decenus arcus *q. m.* in secundo *a. e. p. d. i. u. a* (¹). Pone ergo VIII in X, et unitatem in C, et ita habes quod ex multiplicatione excrevit, digitus et articulus. Refer igitur articulum super priorem denominacionem, juxta regulam quæ dicit: si articulus inde excreverit, ad eamdem denominacionem redit; et multiplica per ipsum articulum, scilicet per unitatem, differentiam, scilicet binarium, sic : semel duo, II sunt. Modo dic regulam deceni arcus, et pone summam quæ inde excreverit, scilicet binarium in deceno, et ita habes VIII et II in deceno, unde surgit X. Remoto igitur VIIII, transfertur unitas in C, et iterum supra ceteras denominationes refertur lege articuli; et per illam unitatem multiplica supradictam differentiam, scilicet binarium, sic : semel II, II sunt. Data regula deceni arcus; ecce restat ut binarius qui ex multiplicatione crevit in X ponatur ; et quia digitus est, ultra denominaciones supradictas in proximo arcu, ut denominacio ponitur : et tunc restat dicere : bis II quatuor, et juxta regulam singularis arcus ponitur ipsum IIII in eodem singulari arcu, et ablatā differencia qua VIII ille divisor regebatur, manifestum est divisorem qui major est, nichil in quaternario posse capere per integros. Finem igitur habet divisio, et restat ut, secundum purgationis regulam, unam de unitatibus quæ sunt in X transferas, alia ibidem relicta et remoto IX; et ecce habes II unitates, unam in C, aliam in X, et binas in singulari; et ita patet quod VIII militibus pertinent de nogentis piris unicuique C et XII, remanentibus IIII in communi. Quod utrum verum sit, multiplicatione poterit probari. Et notandum est quod ista multiplicatio non fit differentiam multiplicando, sed summam quæ differentiæ suberat, scilicet VIII; et sic de ceteris.

XVI. Restat ut de composita divisione cum differentia dicamus. Composita divisio, alia

---

(¹) Decenus arcus quemcumque multiplicat, in secundo ab eo pone digitum, in ulteriori articulum.

continua, alia intermissa. Continua est, quando divisores continue ponuntur; intermissa quando unus arcus, vel duo, vel plures intermittuntur positis divisoribus, quoquo ordine dividendi ponantur. Ut autem quod dicitur clarius liquescat sub exemplo ostendatur continua, deinde intermissa.

Ponantur igitur divisores hii : VI in singulari arcu, VI quoque in deceno, unitas in C. Regula autem superponendarum differentiarum hæc est : Inferiori divisori superponetur integra differentia, scilicet senario superponetur quaternarius; medio vero superponetur differentia minus uno integra, scilicet senario ternarius, et quotiens plures medios posueris, quotquot fuerint, semper differentias minus uno integras eis superpones : major vero divisor nulla gaudet differentia. His ita positis, ponantur dividenda, scilicet VIII in C; VII in milleno. Hoc facto, natura divisionis exigit ut major divisor qui est unitas, sumat mediam partem de dividenda summa, scilicet de VII, et unitas quæ remanebit, sumpta medietate VII, scilicet sumptis tribus, ibidem maneat, et sumpta pars, scilicet III, in inferiori parte deceni arcus ponatur, juxta regulam quam dicam : Compositus divisor cum differentia terciatus, partem sumptam a dividendo ut denominacionem terciabit, si ipsa pars inde sumitur ut a digito; si inde sumitur ut ab articulo, quartabit; et ne deinceps de talibus denominacionibus ponendis dubites, scito quod, sicut terciatus terciat, similiter secundatus secundat, quartatus quartat, et sic de ceteris, semper parte que ut ab articulo sumitur uno arcu inferiorata.

Ut autem quotam partem dividendi major divisor capere debeat intelligas, scias quod si unitas fuerit major divisor, sumit dimidium; si binarius, sumit terciam partem; si ternarius, quartam; si quaternarius, quintam, et ita crescente quantitate denominacionis divisoris, quantitas sumptæ partis semper minuitur. Unde autem hoc contingit quod, si est unitas, sumit dimidiam partem, si binarius, terciam partem et sic de ceteris; et quur in simplici divisione cum differentia tota major summa dividenda ad denominacionem capiatur, posterius dicemus. Sed prius predictam divisionem exequamur. Positis igitur supradictis summis dicamus. Quota est medietas septenarii ? III et remanet I. Hoc dicto, ponatur illa medietas, scilicet III, in inferiori parte X arcus, relicta dividenda unitate in milleno, et tunc restat ut per illam partem, scilicet per ternarium differentias divisorum multiplicemus sic : ter IIII, XII; et secundum regulam multiplicationis deceni arcus, ponitur binarius in deceno, unitas in centeno, et postea dicimus : ter tres, IX. Hoc quoque posito in centeno arcu, secundum regulam, ecce habemus binarium in deceno, novenarium et octonarium et unitatem in centeno, et unitatem in milleno. Modo restat ut remoto novenario et manente octonario, unitas transferatur in millenum. Et tunc iterum quæritur : quota medietas binarii ? unitas; et ea unitate posita super priorem partem, scilicet super ternarium, et alia unitate remota a milleno arcu, per unitatem super ternarium positam multiplica differentias divisorum. Hoc facto et positis excrescentibus summis, secundum regulam multiplicationis, ecce habet IIII et II in X, et VIII et III in C. Purgatis igitur arcubus, remanet VI in deceno, unitas in centeno et unitas, in milleno. Modo quia medietas unitatis per integros non potest sumi, nec aliquis digitus per unitatem notatur, restat ut medietatem X sumamus; et nota quoties poteris sumere ut de digito partem sumendam, nunquam sumes ut de articulo; si vero ut de digito non poteris, sume de articulo : quare sumendam partem continentem inferius per illum numerum notatum inveneris, quotocumque arcu distet a divisore. Et sumpta pars de articulo semper uno arcu a sumpta parte a digito inferiorabitur, secundum regulam supradictam. Dicamus igitur : quota est medietas denarii ? V; posito itaque quinario secundum regulam, in arcu singulari, multiplica differentias divisorum

per V. Hoc facto et purgatis arcubus, remanent duo ternarii, unus in X arcu, alius in centeno; et tunc dicemus : quota est medietas III? Unitas, et remanet unum. Retenta igitur sola unitate in centeno, alia superponitur quinario, secundum regulam supradictam, et per eam unitatem multiplicatis differentiis divisorum, et positis summis excrescentibus in mediis campis, et purgatis arcubus, remanet quaternarius in singulari, senarius in deceno, unitas in centeno et nichil restat dividendum; quod patet remotis differentiis a divisoribus. Pertinent igitur de VII milibus et octingentis piris, CLXVI miltibus unicuique XLVI, remanentibus CLXIIII communibus; quod multiplicatione probari potest.

Ita fit composita divisio cum differentiis et conjuncta.

XVII. Nunc autem de intermissa cum differentiis dicamus, inde exemplum ponendo, sic : ponantur duo senarii divisores, unus in singulari et alter in centeno, et inferiori superponatur integra differentia, majori nulla, et ponatur octonarius dividendus et dicamus : quota est septima pars octonarii? unitas; et ponitur unitas in deceno arcu ut denominacio, et unitas que remanet non transferatur, sed maneat juxta regulam quæ dicit : quod de digito remanet, manet; quod vero de articulo, transfertur, nisi articulus de articulo remanserit, quia tunc quoque manet articulus. Hoc facto restat ut per illam partem, scilicet unitatem, differentiam multiplicemus sic : semel quatuor, quatuor sunt; et posito illo digito, scilicet IIII, in X, secundum regulam multiplicationis, restat ut in superiori parte deceni arcus ponatur novenarius multiplicandus et dicemus : semel IX, novem sunt; et posito IX in centeno, secundum regulam, ecce habemus IIII in X, IX in C, unitatem in milleno in mediis campis. Et notandum est quod sicut ille novenarius in X multiplicandus ponitur, similiter multi novenarii ponerentur multiplicandi, si multi vacui campi intermissione paterent; qui novenarii semper cum differentiis removentur; et hoc interest inter continuam et intermissam divisionem. Modo quia unitas septima parte caret, quæretur quota sit VII pars denarii, et respondebitur unitas, et ponetur uno arcu inferius quasi de digito remaneret, et ternarius qui remanet de X transferetur juxta regulam, et tunc per partem positam, scilicet per unitatem multiplicabitur differentia et novenarius; et positis summis excrescentibus in vacuis campis, juxta regulam, ecce habemus IIII in singulari arcu, IX et IIII in deceno, novenarium et ternarium in milleno. Quibus purgatis, remanet quaternarius in singulari, et ternarius in deceno, et alius in centeno, et unitas in milleno; et tunc quoque quæretur quota sit VII pars denarii, et respondebitur : unitas, et remanent III. Et posita unitate, et translato ternario, et multiplicata differentia et IX per unitatem, et purgatis arcubus, ecce habemus VIII in singulari, binarium in deceno, septenarium in centeno; et remota differentia et novenario, qui sola multiplicationis causa in deceno arcu positus fuit, ad auream divisionem venitur; summa enim dividenda divisoribus habundat. Cetera satis patent.

XVIII. Notandum autem est quod si in inferiori arcu aliquem numerum cum integra differentia posueris, et in milleno unitatem, et inter eos in singulis arcubus singulos novenarios, si istos, inquam, ut divisores posueris, supra dicto modo quæcumque volueris divides, nisi quod novenarios quorum unus est in deceno arcu, alius in centeno, nunquam in summa recolligenda multiplicabis : atque hoc solum interest.

XIX. His pertractatis, restat dicere quur in simplici divisione cum differentia, totum ad denominacionem capiatur; deinde quur in composita divisione cum differentia unitas mediam partem, binarius tertiam, ternarius quartam capiat; et ita singulis in ordine po-

sitis, singulis unitatibus denominacio partium sumendarum crescat. In simplici divisione cum differentia, divisor cum differentia facit X, et in divisione sine differentia nunquam ponitur X divisor; sed quoties in aliquo arcu invenitur X in caracteribus, remoto novenario transfertur unitas, et, sicut lege hujus divisionis cum differentia tota summa major ad denominacionem semel sumitur, similiter eadem summa, vel tota simul, vel per partes, lege divisionis sine differentia, ad denominacionem sumitur; quod satis patebit diligenti experimento investiganti. In divisione autem composita cum differentia, cum inferior divisor cum integra differentia ponatur, et medii divisores habeant differentiam minus uno integram, major autem divisor nullam habeat, unitas de inferiori divisore ad superiorum illum mediis interpositis, non sensibiliter sed intelligibiliter transit; quare si illa unitas juncta illi majori divisori medietas illius conjuncti fuerit, quæritur quota sit medietas dividendi, et ponitur denominacio supradicto modo; si vero translata unitas fuerit III pars conjuncti, quæritur quota sit tercia pars dividendi; si quarta, quæritur de quarta; si quinta, quæritur de quinta; et sic de cæteris. Quia vero hæc supradicta de integra divisione sufficere existimo, deinceps de divisionibus per minucias dicamus. Finite regule Abaci.

Analyse et explication du traité de Gerbert.

Je vais d'abord présenter une analyse succincte de cet ouvrage, et ensuite je l'expliquerai textuellement.

Dans une courte préface, qui forme la lettre d'envoi à Constantin, Gerbert annonce que les règles de l'Abacus sont un sujet très-ardu qui nécessite l'étude des auteurs anciens. Car, sans cela, dit-il, comment saura-t-on ce qu'on entend par *digitus, articulus, minutum?* comment saura-t-on quand un même nombre devient *simple* ou *composé*, tantôt *digit*, tantôt *article?* Il ajoute qu'il exposera brièvement en paroles, mais longuement en préceptes, cet art qui sert à mesurer sûrement le ciel et la terre.

Après cette courte préface, l'auteur expose les règles de la multiplication, puis celles de la division, sans parler des principes du système de numération, ni du *tableau à colonnes* sur lequel les calculs s'exécutaient. Il suppose tout cela connu. On ne voit donc pas tout d'abord à quel système de numération se rapportent les règles qu'il décrit, ni par quels procédés matériels on les exécutait. Mais le sens dans lequel j'ai interprété ce texte pour le rendre intelligible, prouve que c'est bien sur un *tableau à colonnes* et avec des caractères numériques prenant des *valeurs de position* que Gerbert exécute ses calculs. Je n'aurai pas même besoin d'invoquer pour cela l'analogie de ses règles et de tout son texte soit avec le passage de Boèce, soit avec le traité de l'Abacus que j'ai fait connaître précédemment. Il n'y aura donc aucun doute

à ce sujet, je l'espère du moins, quand j'aurai expliqué et éclairci le texte de Gerbert.

Règles de la multiplication.

L'auteur énonce, l'une après l'autre, les règles de la multiplication d'un nombre exprimant des unités, des dizaines ou des centaines, etc., par un nombre exprimant des unités, des dizaines ou des centaines, etc. Ces règles sont les mêmes que celles que nous avons trouvées dans le traité précédent; mais elles ont ici une expression plus laconique, car Gerbert ne donne pas un nom propre, tel que *arcus*, aux colonnes, il les désigne simplement par les termes *singularis, decem, centum, mille,* etc., c'est-à-dire par les nombres I, X, C, M, etc., écrits au haut des colonnes. Ainsi, pour la multiplication d'un nombre des unités par un nombre des unités, il dit : « Si multiplicaveris singularem nu-
» merum per singularem, dabis unicuique digito singularem et omni articulo
» decem. » Et pour la multiplication d'un nombre des unités par un nombre des dizaines : « Si singularem per decenum, dabis unicuique digito decem et
» articulo centum ; » c'est-à-dire, « si l'on multiplie un nombre des unités par un nombre des unités, on donnera au digit la colonne des unités et à l'article la colonne des dizaines. Si l'on multiplie un nombre des unités par un nombre des dizaines, on donnera au digit la colonne des dizaines et à l'article la colonne des centaines. »

C'est probablement pour plus de brièveté que Gerbert désigne les colonnes simplement par les mots *singularis, decem,* etc.; car la plupart des auteurs avaient un terme spécial qu'ils joignaient à ces mots. Boèce appelait les colonnes *pagina, paginula;* Bernelinus et d'autres les désignaient par le terme *linea.* Ainsi *linea singularis, linea deceni,* etc., signifiaient *colonne des unités, colonne des dizaines,* etc. Le terme le plus usité dans tout le cours du XIe siècle a été *arcus.* Mais on s'est servi aussi de beaucoup d'autres expressions, qui toutefois, n'avaient pas un sens aussi particulier, telles que *terminus, spatium, intervallum, sedes, locus, regio, ordo,* etc. Je reviendrai sur cette partie de l'histoire du système de l'Abacus qui n'est pas sans intérêt et où l'on retrouve le fil des idées par lesquelles les Chrétiens, au moyen âge, ont passé pour donner à leur arithmétique sa forme actuelle.

Gerbert énonce l'une après l'autre, et toujours dans les mêmes termes, vingt-et-une règles de la multiplication. La dernière est celle d'un nombre des *cent-mille* par un nombre des *cent-mille.* C'est aussi ce que Boèce avait fait. Plus tard, on a simplifié la classification de ces règles, et on est même

parvenu à les comprendre toutes sous un même énoncé, comme nous l'avons vu dans le traité précédent (1).

Règles de la division.

Si les règles de la multiplication sont faciles à comprendre, il en est tout différemment des règles de la division : celles-ci sont d'une parfaite obscurité; elles semblent ne rien présenter qui ait rapport soit à nos procédés actuels de calcul, soit même à notre système de numération. Cependant, c'est bien dans ce système qu'elles s'exécutaient; mais elles diffèrent de nos règles actuelles, et elles ne nous sont plus connues, problablement depuis six siècles. Elles ont aujourd'hui cela d'intéressant, qu'elles nous donnent une idée de la nature des spéculations arithmétiques qui ont occupé l'esprit des anciens géomètres, probablement dans l'école de Pythagore; car ces règles sont celles de Pythagore même, s'il faut en croire Boèce, qui attribue cette doctrine à ce philosophe.

Les règles données par Gerbert, comme par Boèce, ne sont pas présentées dans toute la généralité qu'elles comportent. L'un et l'autre ne les appliquent qu'à des cas particuliers qui forment autant de chapitres. Elles se rattachent à deux méthodes distinctes. La première est celle où l'on opère *par les différences*, comme on l'a vu dans le traité précédent. La deuxième se rattache à notre méthode actuelle; mais Gerbert ne l'applique qu'à deux cas particuliers, où elle est compliquée d'opérations qui en obscurcissent le principe.

---

(1) L'auteur s'exprime ainsi : « Quoto loco quilibet arcus distat a singulari, toto loco re- » movetur digitus ab eo quem multiplicat, et semper in ulteriore ponitur articulus. »

Plusieurs autres traités contiennent des énoncés également généraux et qui prouvent que les auteurs s'étaient familiarisés avec ces règles de calcul. On y lit : « Quoto loco multiplicator in » Abaco positus fuerit, toto loco ab eo quem multiplicat ordinet digitos, in ulteriore arti- » culos. — Quoto loco multiplicator steterit, toto loco a multiplicando ponat digitos, et ul- » teriore articulos. » (Liber Radulfi Laudunensis de Abaco; Ms. de la Bibliothèque royale, fonds de Saint-Victor, n° 534.) — «Quodcunque multiplicatorum adhibeantur, quisque eorum » quoto loco a singulari distare cernitur, toto loco ab illo quem multiplicat digitum ponit, » alteri vero ab ipso articulum. » (Ms. 591 de la Bibliothèque de Rouen.) — « Quoto loco » multiplicator quisque distabit a primo arcu Abaci, toto loco digitum seponet ab eo quem » multiplicabit, et articulum in ulteriori. » (Ms. G. LXXIII de l'abbaye de Saint-Emmeran de Ratisbonne. Pièce commençant par ces mots : « Doctori et patri theosopho I. G. filius » ejus... »)

Voici les divers cas de la division sur lesquels roule le Traité de Gerbert :

1°. Diviser des unités par des unités. — On retranche simplement le diviseur du dividende, autant de fois qu'il se peut.

2°. Diviser des dizaines ou des centaines, etc., par des unités. — Méthode des différences.

3°. Diviser des centaines, ou des mille, etc., par des dizaines. — Méthode des différences.

4°. Diviser des dizaines, des centaines et des mille, simples ou réunis, par des unités jointes à des dizaines. — Méthode des différences.

5°. Autre manière de diviser des centaines, ou des mille, etc., par les mêmes diviseurs (des unités jointes à des dizaines). — Méthode des différences, qu'on applique de la manière suivante : On réduit le dividende à une seule unité de son ordre, puis on multiplie le quotient et le reste par la dénomination du dividende, c'est-à-dire par le nombre des unités qu'il contient.

6°. Diviser des centaines par des dizaines jointes à des centaines, ou des mille par des centaines jointes à des mille, etc. — Méthode des différences, comme dans le quatrième cas.

7°. Autre manière de diviser des centaines ou des mille par les mêmes diviseurs, simples ou composés. — Méthode des différences. C'est le même procédé qu'au deuxième et au quatrième chapitre.

8°. Diviser des centaines par des centaines jointes à des unités, avec une place vide au milieu (*uno medio numerorum intermisso*), ou des mille par des mille joints à des dizaines, *uno medio intermisso*. — Procédé actuel, si ce n'est qu'on diminue le dividende d'une unité de son ordre, et qu'on conserve cette unité pour en retrancher le produit du diviseur inférieur par le quotient obtenu.

9°. Diviser des mille par des centaines jointes à des unités, ou des dix-mille par des mille joints à des dizaines. — Procédé analogue au précédent, mais plus compliqué. On divise seulement une unité de l'ordre du dividende, et on multiplie ensuite le quotient et le reste par la dénomination de ce dividende. Pour diviser l'unité en question, on la considère comme formant dix unités de l'ordre immédiatement inférieur; on divise ces dix unités par la règle précédente, c'est-à-dire qu'on divise en réalité neuf de ces unités, et qu'on en retient une de laquelle on retranche le produit du diviseur inférieur par le quotient.

10°. Combien de fois un dividende contient les diviseurs. — Dans ce dernier chapitre, Gerbert explique comment on forme les quotients : car il

n'en a rien dit auparavant; il s'est borné à indiquer des calculs, sans en dire le résultat ni ce que ce résultat exprimera.

On voit par cette analyse que, bien que les deux méthodes auxquelles se rattachent les règles de Gerbert soient générales, il n'en a enseigné que des cas particuliers. Et si l'on recherche les causes qui ont pu déterminer le choix de la méthode à appliquer à chaque cas, on voit que l'auteur a eu en vue d'éviter le tâtonnement qui a lieu dans notre procédé actuel, et de déterminer à priori un quotient admissible. C'est à quoi convient toujours la *méthode des différences;* mais aussi elle a le grave inconvénient de donner, à chaque opération, un quotient généralement trop faible, et d'exiger une deuxième opération ou même plusieurs, pour le compléter.

Il est essentiel de remarquer que ces règles n'appartiennent point à Gerbert; ce sont celles que décrit Boèce, à peu près dans les mêmes termes. Gerbert n'a fait autre chose que de les présenter d'une manière un peu moins laconique.

On conçoit qu'avec un tel système de méthodes différentes dans chaque cas particulier, l'arithmétique pratique était une science compliquée et subtile qui pouvait servir à exercer la sagacité des plus habiles mathématiciens. Ces méthodes ont formé probablement, au x[e] siècle, et peut-être chez les Romains, au temps de Boèce, les plus savantes spéculations des géomètres.

Traduction et commentaire du Traité de Gerbert.

J'ai expliqué ci-dessus, dans l'analyse de l'ouvrage de Gerbert, les premières règles de la multiplication. Les autres sont absolument les mêmes, sauf la différence dans l'énoncé des ordres d'unités; il est donc inutile ici de les reproduire. Je passe tout de suite aux règles de la division qui forment la partie obscure de l'ouvrage; d'autant plus que la plupart de ces règles qui ne s'appliquent qu'à des cas particuliers dans la composition du diviseur, s'écartent des règles générales que nous avons trouvées dans le traité précédent. Après avoir traduit littéralement chaque paragraphe, je l'éclaircirai par un commentaire et des exemples numériques.

RÈGLES DE LA DIVISION.

Chapitre I[er]. — *Division d'un nombre des unités par un nombre des unités, ou d'un nombre des dizaines par un nombre des dizaines, etc.*

Dans la division des nombres de l'Abacus, comme les unités sont aux unités, ainsi les dizaines sont aux dizaines, les centaines aux centaines, les

mille aux mille. D'après cela, pour diviser des unités par des unités, ou des dizaines par des dizaines, ou des centaines par des centaines, ou des mille par des mille, il faut retrancher les uns des autres, en les considérant comme de simples unités, c'est-à-dire suivant leur dénomination.

Commentaire. — *Dénomination* s'entend de la valeur absolue d'un chiffre, comme nous l'avons vu précédemment (p. 31).

L'auteur dit que, pour diviser un digit par un digit, il faut retrancher celui-ci du premier, autant de fois qu'il est possible ; et que pour diviser un article par un article du même ordre, par exemple, des centaines par des centaines, il faut considérer les deux nombres comme exprimant de simples unités, et retrancher le diviseur du dividende autant de fois qu'il se peut.

Ce nombre de fois marque le quotient. L'auteur ne le dit pas, parce que ce n'est que dans le dernier chapitre qu'il parle du quotient et de la manière de le former avec les nombres obtenus dans les opérations décrites auparavant.

Chapitre II. — *Comment un nombre des unités divise des dizaines, des centaines, des mille.*

Dans la division des nombres de l'Abacus, comme les unités sont aux dizaines, aux centaines et aux mille, ainsi sont les dizaines aux centaines et aux mille, et les centaines aux mille et aux dix-mille, et les mille aux dix-mille et aux cent-mille. D'après cela, pour diviser des dizaines, ou des centaines, ou des mille, réunis, ou avec intermission, par des unités, on prendra la différence du diviseur à dix; on la multipliera par la dénomination entière du dividende; s'il en résulte des articles, on continuera la division en opérant sur leur propre dénomination et avec la différence déjà posée. Quant aux digits, on les ajoutera aux digits; et s'il en provient des articles, on divisera, comme ci-dessus, jusqu'à ce qu'on arrive à n'avoir que des digits.

Si l'on a des mille (pour dividende) les articles (provenant de la multiplication de la différence par la dénomination du dividende) seront placés dans les mille, et les digits dans les centaines; si l'on a des centaines, on placera les articles dans les centaines et les digits dans les dizaines; si l'on a des dizaines, on placera les articles dans les dizaines, et les digits dans les unités.

Commentaire. — Cette règle, exprimée en termes laconiques, serait très-obscure si elle ne nous était déjà connue; mais si on se reporte à la division par les différences que nous avons expliquée précédemment, on la comprendra sans difficulté.

Un exemple va encore l'éclaircir. Divisons 86 par 7. La *différence* du diviseur à dix, est 3. Le nombre à diviser, 86, doit être considéré comme formé de deux *dividendes,* savoir l'article 80 et le digit 6. Une division partielle ne se fait jamais que sur le premier des dividendes. Divisons donc 80 par 10 ; le quotient est 8. Le produit de la différence 3 par ce quotient, savoir 24, est un nouveau dividende. Ce nombre est formé de l'article 20 et du digit 4. On

divise l'article 20 par 10 ; le quotient est 2. On multiplie la *différence* par ce quotient ; le produit est 6. On ajoute ce digit 6 au digit 4 du nombre 24, et au digit 6 du nombre proposé 86, la somme est 16. On divise l'article 10 par 10 ; le quotient est 1 ; et le produit de la *différence* par ce quotient est 3, qu'on ajoutera aux 6 unités du nombre 16. La somme est 9. Comme ce nombre 9 est un digit, on le divisera directement par le diviseur, suivant la règle du chapitre Ier ; le quotient est 1, et il reste 2.

Ajoutons les quotients partiels obtenus successivement, on a $8 + 2 + 1 + 1 = 12$. C'est le quotient définitif, et il reste 2.

Telle est l'opération suivant la règle décrite par Gerbert. Toutefois, il ne dit pas de prendre les dénominations successives des dividendes, pour quotients partiels, dont la somme sera le quotient cherché ; mais il le dira plus tard dans le dernier chapitre.

Il ne dit pas expressément non plus que quand le dernier dividende est un digit, on cesse de faire usage de la *différence,* et qu'on suit alors la règle du premier chapitre, mais cela est compris implicitement dans ces expressions *diminues usque ad solos digitos.* Et d'ailleurs la nature de l'opération indique elle-même qu'on ne peut plus faire usage de la différence, car on ne peut diviser un digit par 10 (en nombres entiers, comme on l'entend ici). On voit bien, ce que nous avons déjà remarqué précédemment, que s'il n'avait pas été prescrit de s'arrêter aux digits, ce mode de division aurait conduit directement aux *fractions décimales.*

Chapitre III. — *Comment on divise des centaines ou des mille par des dizaines ; ou des mille par des centaines, etc.*

Pour diviser des centaines ou des mille par des dizaines ; des mille ou des nombres supérieurs par des centaines, ou des dix-mille et au delà par des mille, on prendra la *différence à dix* du diviseur considéré comme des unités ; on multipliera cette *différence* par la dénomination entière du dividende (1) ; on continuera la division sur les articles et les digits (provenant de cette multiplication), jusqu'à ce qu'on arrive au dernier diviseur, comme on fait dans la division par des unités.

Observation. — Il est clair que la division par un article tel que 30 ou 300, etc., se fera comme la division par un digit. Ce chapitre est donc intelligible d'après ce qui précède. Seulement, il faut savoir que ce que l'auteur appelle le *dernier diviseur* s'entend du *dernier quotient,* lequel est celui qui provient d'un dividende du même ordre que le diviseur. Ce quotient ne peut se calculer par la méthode des différences : on le détermine de la manière indiquée dans le premier chapitre.

---

(1) Je néglige ici les mots « id est per vocabula singularis ac deceni, » qui me paraissent provenir d'une glose insérée dans le texte.

CHAPITRE IV. — *Diviser des dizaines, des centaines, des mille, ensemble ou avec intermission, par des unités jointes à des dizaines.*

Pour diviser par des dizaines jointes à des unités, des dizaines seules ou réunies à des unités, voyez quelle partie (du dividende) comporte le chiffre des unités du diviseur; car 2 se rapporte à la moitié du dividende, 3 au tiers, 4 au quart, 5 au cinquième, et ainsi des autres; c'est-à-dire prenez la *différence à dix* du chiffre des unités du diviseur, et multipliez cette différence par la dénomination de la moitié, du tiers, du quart (du dividende); et ce qui excède cette moitié, ce tiers, ce quart, ajoutez-le (au produit). Et si la somme est plus grande que le diviseur, on continuera la division par la même règle. On ajoutera semblablement les unités du (dividende) composé pour continuer la division.

On divisera de même des centaines et des mille, si ce n'est qu'on convertira une centaine ou un mille en articles de l'ordre inférieur, ce qui n'a pas lieu pour une dizaine, et, de même qu'on convertira une centaine en dizaines, ou un mille en centaines, on convertira aussi séparément les restes (de la division). Les articles provenant (de la division) d'une centaine ou d'un mille seront placés à un rang inférieur, et les articles provenant (de la division) de plusieurs centaines ou mille seront placés dans la colonne des dividendes.

Commentaire. — Cette règle repose sur le même principe que celles des deux chapitres précédents : elle consiste à diviser par un nombre plus grand que le diviseur proposé; ce nombre est l'article immédiatement supérieur à ce diviseur. Ainsi, faut-il diviser par 24, on divisera effectivement par 30 ou par le digit 3. Mais la manière dont Gerbert désigne ce nombre par lequel il faut diviser est fort obscure.

En effet, nous avons vu, dans le Traité précédent, que c'est le plus grand diviseur, augmenté d'une unité, qui forme le digit qui marque les parties à prendre. Dans le cas actuel, le plus grand diviseur est de l'ordre des dizaines; il semble donc qu'il eût été plus clair et plus conforme à la nature de l'opération que Gerbert dît : Voyez quelle partie (du dividende) prendra le diviseur des dizaines. Cependant il dit : Voyez quelle partie prendra le diviseur des unités. Voici, ce me semble, l'idée qui a porté Gerbert à s'exprimer ainsi. Nous avons vu que, pour expliquer la méthode, pour prouver, par exemple, que, quand on divise par 24, il faut prendre *le tiers* du dividende, il est dit, dans le Traité précédent, que c'est parce que le diviseur des unités, c'est-à-dire 4 joint à sa différence 6, forme une unité (de l'ordre des dizaines) qui, ajoutée au diviseur des dizaines, fait une somme dont cette unité est *le tiers*. D'après cette considération, c'est donc *le diviseur des unités*, c'est-à-dire 4, qui avec sa différence détermine la partie *un tiers*.

Voilà l'explication, je pense, de la phrase obscure et tout à fait amphibologique de Gerbert. Du reste, sa règle se rapporte évidemment à la division par les différences; et il

indique lui-même la marche de l'opération, en ajoutant sous forme d'explication : « Id est, » differentia divisoris ad decenum multiplicabitur per denominationem secundarum, etc.; » c'est-à-dire, « on multipliera la différence à dix du diviseur des unités par la dénomination de la partie prise. » C'est là précisément la règle de la division composée, *par les différences*.

Ensuite Gerbert dit comment on divisera des centaines et des mille par les mêmes diviseurs, c'est-à-dire par des dizaines jointes à des unités. Le texte est encore assez difficile à comprendre. Du reste, il semble faire double emploi avec le chapitre suivant. Aussi ne le trouve-t-on pas dans quelques manuscrits (mss. nº 41 de Chartres et nº 591 de Rouen). La méthode indiquée par l'auteur consiste à diviser 10 unités de l'ordre inférieur au dividende proposé et à multiplier le quotient par la dénomination du dividende. Comme la division se fait par la méthode des différences, on aura à multiplier la *différence* du diviseur des unités par ce quotient. Les articles du produit seront placés dans la colonne de l'ordre inférieur au dividende, puisque c'est 10 unités de cet ordre qu'on a divisées. C'est ce que Gerbert exprime en ces termes : « Et articuli quidem ab uno centeno vel milleno secundabuntur. » Ce produit forme le reste de la division des 10 unités de l'ordre inférieur; il faudra le multiplier par la dénomination du dividende pour avoir le véritable reste de la division du dividende proposé. Les articles du produit seront placés dans la colonne même du dividende. C'est ce que l'auteur exprime par ces mots : « A pluribus dividendorum obtinebunt (articuli) sedes. »

Tout cela est, comme on le voit, fort obscur et énigmatique. Il faut croire que quand Gerbert a écrit ce Traité on était déjà familiarisé avec ces procédés de calcul, qui, du reste, sont ceux décrits par Boèce, encore plus laconiquement il est vrai.

CHAPITRE V. — *Autre division des centaines ou des mille, et au delà, par les mêmes diviseurs.*

Pour diviser des centaines ou des mille, ou au delà, par des dizaines jointes à des unités, on divisera une centaine comme ci-dessus, en prenant la différence du diviseur *à dix;* et on multipliera le reste par la dénomination du dividende proposé.

Et si aux centaines sont jointes des unités pour former un nombre composé, ou bien des dizaines et des unités, dans le premier cas, on divisera, et dans le second, on les ajoutera, comme il a été dit ci-dessus dans la division par des dizaines jointes à des unités.

Les premiers articles sont placés dans la première colonne à droite du dividende; les autres articles sont placés dans la colonne du dividende.

Commentaire. — Complétons d'abord les dernières phrases de l'auteur, qui, dans leur laconisme actuel, ne peuvent présenter de sens. Nous dirons : « Si aux centaines sont jointes des unités pour former un nombre composé, ou bien des dizaines et des unités, dans » le premier cas, on divisera le produit, et, dans le second, on ajoutera à ce produit les » unités et les dizaines du dividende composé, et on divisera la somme.

» Les premiers articles, c'est-à-dire ceux qui proviennent de la multiplication de la diffé- » rence par le quotient de la centaine, sont placés dans la première colonne à droite du di-

» vidende. Les autres articles, qui proviennent de la multiplication des premiers par la » dénomination du dividende proposé, sont placés dans la colonne du dividende. »

Le principe de cette règle est de faire la division d'une centaine par le diviseur proposé, en se servant des différences par la règle du chapitre IV; puis de multiplier le quotient et le reste par la dénomination des centaines proposées.

Par exemple, divisons 895 par 43. On divisera 100 par 43, et on multipliera le quotient et le reste par 8; ce qui donnera le quotient cherché, et un nouveau dividende sur lequel on opérera de même.

La division devant se faire par la méthode des différences, comme dans le chapitre précédent, on prendra la *différence* du diviseur 3, laquelle est 7; et on divisera par 5, nombre égal au plus grand diviseur 4 plus 1.

100, c'est-à-dire 10 dizaines, divisés par 5 donnent 2 pour quotient; le produit de la différence 7 par ce quotient est 14; l'article 10 doit être placé dans la colonne voisine de celle du dividende. Ce sera donc dans la colonne des dizaines. Le produit de ce nombre 14 par la dénomination 8 du dividende est 112; le nouvel article 100 doit être placé dans la colonne du dividende.

Ainsi l'on a à diviser 112; il faut y ajouter les 95 du dividende primitif, il vient 207. C'est le nouveau nombre à diviser.

Si l'on eût eu seulement à diviser 805, au lieu de 895, il eût été inutile d'ajouter 5 à 112, parce qu'on n'eût pas augmenté par-là le dividende 100. On aurait divisé tout de suite ce dividende 100. C'est là ce que Gerbert exprime en disant *diminues, vel aggregabis.*

Autre exemple. Divisons 874 par 35. La différence est 5. On divisera 100, c'est-à-dire 10 dizaines par 4. Le quotient est 2. Le reste 20. On multipliera la différence par 2. Le produit est 10, qu'on ajoutera à 20. De sorte que 100, divisés par 35, donnent 2 pour quotient et 30 pour reste. On multipliera ce quotient et ce reste par 8. On aura 16 et 240; à ces 240 on ajoutera 74; ce qui fait 314, qu'on divisera de nouveau. Divisant 100, on a, comme ci-dessus, 2 pour quotient et 30 pour reste. Multipliant ces deux nombres par 3, on a 6 et 90; ajoutant 14 à 90, on a 104 pour nouveau dividende; le quotient est 2, et il reste 34.

Le quotient total est donc $16 + 6 + 2 = 24$, et le reste 34.

Chapitre VI. — *Comment des dizaines jointes à des centaines, ou des centaines jointes à des mille, divisent des centaines, ou des mille, ou au delà.*

Pour diviser des centaines ou des mille par des centaines réunies à des dizaines, ou par des mille réunis à des centaines, on verra quelle partie comporte le chiffre des dizaines, ou des centaines, ou des mille du diviseur; on multipliera la *différence* du diviseur par la dénomination de ces parties, comme on fait dans le cas des dizaines jointes à des unités.

Observation. — Cette règle est tout à fait la même que celle du chapitre IV.

Chapitre VII. — *Autre division, de centaines ou de mille ou au delà, par les mêmes diviseurs, composés ou simples.*

Pour diviser des centaines ou des mille par des dizaines, ou des mille par des centaines, prenez la *différence à dix* du diviseur, comme s'il exprimait des unités; multipliez cette différence par la dénomination entière du dividende, si le diviseur est simple, ou par la moitié, le tiers, le quart, etc., si le diviseur est composé, d'après la règle qui indique quelle partie (du dividende) comportent les dizaines ou les centaines du diviseur composé.

Commentaire. — L'auteur suppose deux cas : 1° que le diviseur est simple, soit des dizaines, soit des centaines; 2° que le diviseur est composé, soit des dizaines avec des centaines, soit des centaines avec des mille.

Dans le premier cas, la règle est la même qu'au chapitre II, où l'on divise par des unités simples; et dans le second, elle est la même qu'au chapitre IV, où l'on divise par des unités jointes à des dizaines.

Dans le premier cas, où le diviseur est simple, comme 20, par exemple, ou deux dizaines, c'est sa différence à *dix*, savoir 8, qu'on prend et qu'on multiplie par la dénomination du dividende; c'est alors comme si l'on divisait par 100.

Et dans le second cas, où le diviseur est composé, comme 520, ce n'est plus par la dénomination entière du dividende qu'on multiplie la différence 8, c'est par sa sixième partie, *per sextas dividendi;* alors on divise réellement par 600.

Chapitre VIII. — *Comment on divise par deux diviseurs séparés par une place vide.*

Pour diviser des centaines ou des mille par des centaines ou des mille composés, une place intermédiaire étant vide, on prendra une unité de l'ordre du dividende *ad minuta componenda*, et on comparera le plus grand diviseur au dividende diminué de cette unité. S'il y a un reste, on l'écrira comme étant un des restes de la division. On multipliera le *minutum* par la dénomination du nombre qui égale le diviseur au dividende (c'est-à-dire le quotient).

On posera dans la colonne du digit la *différence* entière (du digit du produit), et devant l'article sa différence moins un, comme se rapportant aux deux nombres juxtaposés, quand ils sont des digits et des articles. Car un article seul demande la différence entière; un digit seul demande aussi la différence entière. Et alors qu'il n'y a qu'un digit, on prend aussi la *différence* entière du nombre réservé *ad minuta componenda*, et on la place à un rang après lui (c'est-à-dire qu'on écrira un 9 à la gauche de la *différence* du digit).

Ces différences et ce qui reste après qu'on a enlevé (du dividende) le plus grand diviseur, formeront ce qui reste des dividendes.

Commentaire. — Jusqu'à présent les règles exposées par Gerbert ont toujours roulé sur la méthode des *différences*, qui consiste principalement à diviser par un nombre plus grand que le diviseur. La méthode exposée ici est tout autre, quoiqu'il y soit encore question de *différences*, et elle rentre dans notre méthode actuelle.

Pour l'expliquer prenons un exemple : 900 à diviser par 304. Ce nombre 304 est composé de deux diviseurs séparés par une place vide, ce qui est le cas de la question. 300 est le plus grand diviseur, et 4 le plus petit. C'est ce second diviseur que l'auteur appelle *minutum*. On partage le dividende 900 en deux parties, 100 et 800. On divise les 800 comme s'ils étaient le véritable dividende, par le plus grand diviseur 3, et l'on réserve 100 pour en soustraire le produit du *minutum*, c'est-à-dire du diviseur 4, par le quotient. Appliquons ces principes de calcul.

800 divisés par 3 donnent 2 pour quotient et 200 pour reste. Le produit du diviseur 4 par ce quotient est 8; il faut retrancher 8 du dividende 100 réservé. On fait cette soustraction en écrivant le complément de 8 à 100, lequel est 92. Le reste de la division se compose donc de 200 et de 92, = 292.

Telle est la marche de l'auteur. Sa manière de s'exprimer pour dire qu'on retranchera 8 du dividende 100 réservé, mérite d'être remarquée; il dit : On pose la différence entière du digit, laquelle est 2; puis on prend la différence entière du nombre réservé *ad minuta componenda*, lequel est 1, c'est-à-dire une centaine; cette différence est 9; on la recule d'une place, c'est-à-dire qu'on l'écrit dans la colonne des dizaines. On a ainsi 92.

Dans le chapitre suivant, nous donnerons un second exemple de cette méthode, en divisant 1000 par 406.

Chapitre IX. — *Comment des centaines jointes à des unités divisent des mille et au delà, et comment des mille joints à des dizaines divisent des dix-mille et au delà.*

Pour diviser des mille ou au delà, par des centaines jointes à des unités, on prendra un des mille pour en faire des centaines, et une de ces centaines *ad minuta componenda*. On divisera l'excédant (c'est-à-dire neuf centaines) par le plus grand diviseur; et s'il y a un reste, on le réservera. On multipliera le *minutum* comme dans le chapitre précédent. On rangera (on placera dans les colonnes convenables) ce qui a été réservé (c'est-à-dire le reste des neuf centaines), et les différences (du produit). On multipliera ces différences et ce reste par la dénomination du dividende proposé. Et l'on continuera ainsi jusqu'aux dernières différences.

On appliquera la même règle quand on voudra diviser des dix-mille ou au delà, par des mille joints à des dixaines.

Commentaire. — Cette règle repose, comme la précédente, sur notre méthode actuelle, mais celle-ci se trouve appliquée d'une manière particulière. Au lieu de faire directement la

division du dividende proposé, on divise seulement une unité de son ordre; on a un quotient et un reste. On multiplie ensuite ces deux nombres par la dénomination du dividende, c'est-à-dire par le digit qui exprime ce dividende. On a ainsi le quotient du dividende proposé, et un reste que l'on divise encore s'il est plus grand que le diviseur.

Quant à la division d'une unité de l'ordre du dividende, on la fait par la règle précédente, en réservant une unité de l'ordre inférieur *ad minuta componenda.* Par exemple si l'on a des mille pour dividende, on divise simplement 1 mille par le diviseur proposé; et pour faire cette division on considère 1 mille comme 10 centaines, et l'on ne divise que 9 centaines, parce qu'on réserve une centaine *ad minuta componenda.*

Prenons pour exemple 3000 à diviser par 407. On divisera 1000 par 407. Pour cela, on considérera 1000 comme faisant 10 centaines; on réservera une centaine *ad minuta componenda;* on ne divisera donc que 900; le quotient est 2, et il reste 100. Il faut multiplier le *minutum,* c'est-à-dire le diviseur 7, par 2, ce qui donne 14, puis prendre les *différences* de ce produit, savoir 86, qu'on ajoute au reste 100, ce qui fait 186. C'est le reste de la division du nombre 1000 par 407. Maintenant il faut multiplier le quotient 2, et le reste 186 par 3, dénomination du dividende proposé. Les produits sont 6 et 558. Ce sont les résultats de la division de 3000 par 407; 6 est le quotient et 558 le reste. Ce nombre est plus grand que le diviseur et le contient une fois, avec 151 pour reste. On a donc enfin 7 pour quotient de 3000 divisés par 407, et 151 pour reste.

Chapitre X. — *Combien de fois un dividende quelconque contient les diviseurs.*

1°. Pour connaître combien de fois un dividende contient les diviseurs, on reculera d'un rang vers les digits, les articles qui forment les dénominations de la multiplication (c'est-à-dire les dénominations par lesquelles on multiplie les différences); et si de la somme de ces dénominations il provient des articles, on les reportera au rang des articles.

Et si dans la colonne des unités il y a plusieurs dividendes égaux au diviseur, on ajoutera aux collections (des dénominations) autant d'unités.

Cela concerne les dénominations par le tout (c'est-à-dire les cas où l'on prend les dénominations entières des dividendes).

2°. Dans les divisions par les parties (*a partibus,* c'est-à-dire où l'on prend les parties de la dénomination du dividende), qui sont la moitié, ou le tiers, ou le quart, etc., on suit la même règle, et au plus grand diviseur on ajoute l'unité.

3°. Comme dans les centaines et les mille, ce qui reste (de la division) d'une centaine ou d'un mille, est multiplié par la dénomination de toute la somme (la dénomination entière du dividende); de même les diviseurs (c'est-à-dire le nombre de fois que le diviseur est contenu dans le dividende, ou, en d'autres termes, le quotient), seront multipliés par la dénomination du dividende entier, mais seulement dans les centaines et les mille.

4°. Quand des dizaines seules divisent des centaines, ou des mille ou au delà, on place les dénominations à la troisième colonne, c'est-à-dire au troisième rang à partir du dividende, pour former les diviseurs (les quotients).

5°. Quand des centaines ou des mille, composés avec intermission (une colonne vide), divisent des nombres semblables (des centaines ou des mille), on place les dénominations dans les derniers digits (dans la colonne des unités).

Commentaire. — Ce chapitre a pour objet d'indiquer quel est le quotient dans chacune des divisions enseignées dans les chapitres précédents. Il est très-obscur, parce que les phrases qui se succèdent n'ont pas de liaison entre elles, et se rapportent à des opérations différentes que l'auteur n'indique pas, et qu'il suppose que l'on connaît parfaitement.

1°. Le premier paragraphe s'applique à la règle II, relative à la division d'un nombre par un digit. Nous avons vu qu'on divise par dix ; il faut donc placer la dénomination du dividende à un rang après lui. On fait ensuite la somme de toutes ces dénominations pour former le quotient définitif.

Toutefois, quand l'opération conduit à de simples digits pour dividendes, on n'opère plus par la méthode des *différences*, parce qu'on ne pourrait plus diviser par dix ; alors on suit la règle du premier chapitre : on soustrait le diviseur du dividende ; et autant de fois le diviseur se trouve dans le dividende, autant d'unités il faudra ajouter au quotient. C'est ce que l'auteur exprime par ces mots : *Et si in singularibus pares divisoribus provenerint, totidem unitates collectionibus aggregabis.*

2°. Le § 2 se rapporte aux chapitres IV et V, où l'on a à diviser par des dizaines jointes à des unités. Les dénominations se prennent *a partibus*, puisqu'on divise par 20, ou par 30, ou par 40, etc., et se placent au second rang, c'est-à-dire après le dividende, comme dans la division par un digit.

L'auteur ajoute que pour le dernier diviseur on prend l'unité pour quotient.

Un exemple va faire comprendre cette règle. Divisons 86 par 17. La différence du plus petit diviseur est 3, et l'on divisera par 2, c'est-à-dire par 20. Le quotient de 8 par 2 est 4. Le produit de la *différence* par 4 est 12. A ce nombre il faut ajouter les six unités du dividende ; on a 18. On ne peut pas se servir de la méthode des différences pour diviser 18 par 17 ; cependant on peut retrancher 17 une fois de 18, et il reste 1. Le quotient total est donc $4+1=5$. Les 17 qu'on retranche de 18 sont ce que Gerbert appelle le dernier diviseur, lequel donne une unité pour quotient.

Il est clair que quand on ne peut plus se servir de la méthode des différences, le diviseur ne peut pas être contenu plus d'une fois dans le dividende. Car s'il y était deux fois, le dividende serait plus grand que l'article immédiatement supérieur au diviseur, et alors on se servirait de la méthode des différences. Ainsi, quand la division est arrivée au point où la méthode des différences n'est plus applicable, on ne peut obtenir tout au plus que l'unité pour quotient. De sorte que la règle est exacte.

3°. Le § 3 se rapporte aux chapitres V et IX, où l'on a à diviser des centaines par des dizaines jointes à des unités, ou des mille par des centaines jointes à des unités. Dans le premier

cas, on divise une centaine, et dans le second un mille; il faut donc multiplier le quotient obtenu par la dénomination du dividende, c'est-à-dire par le digit qui exprime combien on avait de centaines ou de mille à diviser. C'est ce que dit Gerbert en ces termes : *Divisores per denominationem totius dividendi multiplicabuntur.* Ici le mot *divisores* doit s'entendre du *quotient*, et non pas des diviseurs. L'auteur a voulu entendre par cette expression *les diviseurs*, le nombre de fois que les diviseurs sont compris dans le dividende.

4°. Le § 4 se rapporte au chapitre III et à la première partie du chapitre VII. L'auteur dit que quand on divise par un diviseur des dizaines, il faut placer la dénomination du dividende dans la troisième colonne à partir de celle où se trouve le dividende. Cela est juste, puisque l'on divise dans le fait par 100. L'auteur ajoute « pour faire la somme des *diviseurs* »; ici *diviseur* signifie *quotient*.

Par exemple, si l'on a à diviser 600 par 30, Gerbert aurait dit que 600 contient 20 *diviseurs* (vingt fois le diviseur).

5°. La règle du § 5 est évidente. Car si des centaines, par exemple, divisent des centaines, il est clair que le quotient exprimera des unités. Ce paragraphe se rapporte aux chapitres VI et VIII, et à la deuxième partie du chapitre VII.

Texte du Traité de Gerbert.

Constantino suo Gerbertus scolasticus (1).

Vis amicitiæ pene impossibilia redigit ad possibilia. Nam quomodo rationes numerorum Abaci explicare contenderemus, nisi te adhortante, o mi dulce solamen! Itaque cum aliquot lustra jam transierint, ex quo nec librum nec exercitium harum rerum habuerimus, quædam repetita memoriæ eisdem verbis proferimus, quædam eisdem sententiis. Nec putet philosophus sine literis hæc alicui arti vel sibi esse contraria. Quid enim dicet esse digitos, articulos, minuta, qui auditor majorum dedignatur fore? Vult tamen videri solus scire, quod mecum ignorat, ut ait Flaccus? Quid cum idem numerus modo simplex, modo compositus, nunc digitus, nunc constituatur ut articulus? Habes ergo, talium diligens investigator, viam

---

(1) J'ai trouvé ce Traité de Gerbert dans neuf Mss. dont voici l'indication : 4 Mss. de la Bib. royale, n°s 6620, 7189 et 8663, *ancien fonds*, et *fonds de Baluze*, 4e armoire, paquet 6. — Ms. n° 41 de la Bib. de Chartres; — N° 591 de la Bib. de Rouen. — N° G. LXXIII de la Bib. de l'abbaye de Saint-Emmeran de Ratisbonne; — N° 38 des Mss. de Scaliger appartenant à la Bib. de l'université de Leyde. — Ms. 10078—95 de la Bib. royale de Bruxelles.

M. Boeckh dit qu'il en existe une copie dans la Bib. royale de Berlin. (*Index lectionum... per semestre æstivum* A. 1841, p. II.)

On sait que ce Traité a été imprimé dans les œuvres de Bède sous le nom de cet auteur. (Édition de Bâle, t. Ier, p. 159.)

Les catalogues de Mss. citent des ouvrages de Gerbert sur l'arithmétique, dont plusieurs, provenant des Bib. de Petau et de la reine Christine, se trouvent actuellement dans la Vaticane. Peut-être ne sont-ce, sous des titres divers, que des copies de la lettre à Constantin. Il serait utile d'en faire la vérification.

Les auteurs qui ont parlé des ecrits de Gerbert l'ont toujours fait avec confusion, et souvent d'une manière fautive. On s'est trompé aussi en lui attribuant des pièces qui ne lui appartiennent pas, notamment le Traité de Bernelinus qu'on trouve dans le Ms. 7193 de la Bib. royale, et un autre Traité qui commence par ces mots : « Doctori et patri theosopho I. G. filius, etc., » dans le Ms. G. LXXIII de l'abbaye de Saint-Emmeran de Ratisbonne.

rationis brevem quidem verbis, sed prolixam sententiis et ad collectionem intervallorum et distributionem in actualibus geometrici radii secundum inclinationem et erectionem et in speculationibus et actualibus simul dimensionis cæli et terræ plena fide comparatam.

De simplici.

Si multiplicaveris singularem numerum per singularem, dabis unicuique digito singularem et omni articulo decem, directe scilicet, et conversim.

Si singularem per decenum, dabis unicuique digito decem et omni articulo centum.

Si singularem per centenum, dabis unicuique digito centum et articulo mille.

Si singularem per millenum, dabis digito mille et articulo decem millia.

Si singularem per decenum millenum, dabis digito decem millia et articulo centum millia.

Si singularem per centenum millenum, dabis digito centum millia et articulo mille millia.

De deceno.

Si decenum per decenum, dabis digito centum, et articulo mille.

Si decenum per centenum, dabis digito mille et articulo decem millia.

Si decenum per millenum, dabis digito decem millia et articulo centum millia.

Si decenum per decenum millenum, dabis digito centum millia et articulo mille millia.

Si decenum per centenum millenum, dabis digito mille millia et etiam unicuique articulo decies mille millia.

De centeno.

Si centenum per centenum, dabis digito decem millia et articulo centum millia.

Si centenum per millenum, dabis digito centum millia et articulo decies centena millia.

Si centenum per decenum millenum, dabis digito mille millia et articulo decies mille millia.

Si centenum per centenum millenum, dabis digito decies mille millia et articulo centies mille millia.

De milleno.

Si millenum per millenum, dabis digito decies centena millia et articulo millies mille millia.

Si millenum per decenum millenum, dabis digito decies mille millia et articulo centies mille millia.

Si millenum per centenum, dabis digito centies mille millia et articulo centies millies mille millia.

De deceno milleno.

Si decenum millenum per decenum millenum, dabis digito centies mille millia et articulo mellies mille millia.

Si decenum millenum per centenum millenum, dabis digito millies mille millia et articulo decies millies mille millia.

De centeno milleno.

Si centenum millenum per centenum millenum, dabis digito decies millies mille millia et articullo centies millies mille millia.

I. Quomodo dividatur singularis per singularem, vel decenus per decenum, vel centenus per centenum, vel millenus per millenum.

In partitione numerorum abaci, sicut se habent singulares ad singulares, sic quodam modo habent se deceni ad decenos, centeni ad centenos, milleni ad millenos; hoc modo : si volueris dividere singulares per singulares, vel decenum per decenum, vel centenum per centenum, vel millenum per millenum, secundum denominationem eorum singulares singularibus subtrahes.

II. Quomodo singularis sua quantite metiatur decenos, centenos, millenos.

In partitione numerorum abaci, sicut se habent singulares ad decenos et centenos et millenos, sic se habent deceni ad centenos et millenos, et centeni ad millenos et decenos millenos, et milleni ad ultra se compositos, decenos millenos et centenos millenos; hoc modo : si volueris per singularem numerum dividere decenum, aut centenum, aut millenum, vel simul vel intermisse, differentiam divisoris a singulari ad decenum per integram denominationem dividendi multiplicabis; et articulos quidem propria denominatione et posita differentia diminues; digitos vero digitis aggregabis; et si articuli provenient, ut supra diminues usque ad solos digitos: et millenus quidem habebit articulos in millenis, digitos in centenis; centenus articulos in centenis, digitos in decenis; decenus articulos in decenis, digitos in singularibus.

III. Quomodo metiatur decenus centenum aut millenum, vel centenus millenum, vel millenus ulteriores.

Si volueris per decenum numerum dividere centenum vel millenum, aut per centenum, millenum vel ulteriores, aut per millenum, sequentes, differentiam divisoris quasi singularis ad decenum per integram denominationem dividendi multiplicabis, id est per vocabula singularis ac deceni; articulos ac digitos diminues usque ad extremum divisorem, sicut fiebat in singularibus quem libet numerum dividentibus.

IV. Quomodo singulares juncti decenis metiantur decenos, centenos, millenos, vel simul, vel intermisse.

Si volueris per compositum decenum cum singulari dividere vel simplicem decenum, vel cum singulari compositum, considera quotam partem divisoris teneat singularis : nam secundus singularis habet rationem ad secundas dividendi, tertius ad tertias, quartus ad quartas; quintus ad quintas, et deinceps; id est, differentia a singulari divisoris ad decenum multiplicabitur per denominationem secundarum, tertiarum, quartarum : Quod vero exuperat secundas, tertias, quartas, quintas aggregabis : et si multipliciores sunt divisore, eadem regula diminuentur. Similiter vero et singulares compositi ad dividendum aggregabuntur.

Et in centenis et millenis idem facies, id est, sicut unum centenum vel millenum dissipabis in sede denarii ac centenarii, de proposito dividendo, sic reliquos singillatim dissipa, nisi quod unum centenum vel millenum in cæteros dissipabis, quod in uno non evenit deceno; et articuli quidem ab uno centeno vel milleno secundabuntur; a pluribus dividendorum obtinebunt sedes.

V. Item alia divisio centeni vel milleni, et deinceps, per eosdem divisores.

Si volueris dividere centenum vel millenum, et deinceps, per decenum cum singulari compositum, primum centenum veluti supra divides, sumpta differentia divisoris a singulari ad decenum: et quod superaverit per denominationem propositi centeni multiplicabis. Et si singularis centeno ad compositionem additur, aut decenus cum singulari, diminues, vel aggregabis, quemadmodum superius dictum est in decenis et singularibus. Et primi quidem articuli sunt in summa dividendis proxima ac minore; augmentati vero in articulos alios dividendorum obtinent sedes.

VI. Quomodo deceni juncti centenis, vel centeni millenis, metiantur centenos aut millenos aut ulteriores.

Si volueris per compositum centenum cum deceno, vel per compositum millenum cum centeno dividere aut centenum aut millenum, considera quotam partem divisoris teneat decenus, vel centenus, vel millenus; et per denominationem earum partium multiplica differentiam divisoris, sicut faciebas in singularibus junctis cum decenis.

VII. Item alia divisio centeni vel milleni, et deinceps, per eosdem compositos divisores et per simplices.

Si volueris dividere centenum vel millenum, per decenum; aut millenum per centenum, sumes differentiam divisoris, secundum rationem singularium ad decenum, et multiplicabis, aut per totam denominationem dividendi, si simplex decenus, vel centenus divisor est; vel per secundas, vel per tertias, vel per quartas, vel per quintas, si compositus est: habita videlicet ratione, quam partem compositi divisoris teneat decenus vel centenus.

VIII. Quomodo, uno medio numerorum intermisso, juncti duo extremi cæteros metiantur.

Si volueris dividere centenum vel millenum per compositum centenum vel millenum, uno intermisso, unum dividendorum sumes ad minuta componenda, et maximum divisorem reliquæ parti comparabis. Et si quid abundaverit, relinquendis repones. Minutum autem per denominationem ejus per quem divisor coæquatur dividendo, multiplicabis. Et in digitis quidem perfecta ponetur differentia: ante articulos vero altera differentia, uno minus, quasi rationem habens ad juxta positos, quum sunt digiti et articuli. Nam solus articulus, id est sine digitis, integram sibi proponit differentiam. Solus digitus integram supponit: et tum quum solus est digitus, ei qui ad minuta componenda seclusus est differentia integra secundabitur. Et hæ quidem differentiæ, et si quis forte a maximo divisore seclusus est, significabunt quod relinquitur ex dividendis.

VIIII. Quomodo centenus cum singulari metiatur millenum et ulteriores, vel millenus cum decenis decenos millenos et ulteriores.

Si volueris dividere millenum vel ulteriores, per centenum cum singulari compositum, unum millenum in centenos dissipabis; et rursus unum centenum ad minuta componenda secludes, et maximum divisorem reliquæ parti comparabis. Et si quid secludetur, relinquendis repones. Minutum autem, ut in superiori capitulo, multiplicabis, reliquaque omnia vel quæ secluduntur vel quæ pro differentiis adhibentur, ordinabis. Rursusque easdem differentias, ac si qui forte seclusi sunt, per denominationem propositi dividendi multiplicabis. Ac iterum eadem regula deduces, usque ad extremas differentias. Et in millenis divisoribus cum decenis ad decenos millenos et ulteriores quasi eandem ipsam rationem servabis.

X. Quot divisores sint in quolibet dividendo.

(1°). Si volueris nosse quot divisores sint in quolibet dividendo, articulos a quibus denominationes fiunt multiplicationis secundabis ad digitos; et, si augmento eorum articuli provenient, reflectes ad articulos.

Et si in singularibus pares divisoribus provenerint, totidem unitates collectionibus aggregabis.

Igitur et in denominationibus a toto.

(2°). Et a partibus, quæ sunt a secundis, et tertiis, et quartis, et deinceps, secundum eandem rationem. Pro extremo divisore unitatem constitues.

(3°). Et sicut in centenis et millenis, quod ab uno exuperat per denominationem totius summæ multiplicatur, sic divisores per denominationem totius dividendi multiplicabuntur : sed in ipsis tantum modo centenis et millenis.

(4°). Simplex decenus divisor centeni, vel milleni et ultra compositorum, denominationes mittit ad tertias, id est ad tertium locum ab eo quem dividit, scilicet in colligendis divisoribus.

Centenus vel millenus divisores sui, et compositi uno relicto, denominationes suas mittunt ad extremos digitos.

IMPRIMERIE DE BACHELIER,
RUE DU JARDINET, n° 12.

[illegible]

